Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 175

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1936

Archiv-Nr. 18 03 36

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35.

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 175.

Seite

Beck, H., Eine Cremonasche Raumgeometrie 129

Deuring, Max, Über den Hauptsatz der Algebrentheorie 63

— — , Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum . . . 124

Haenzel, G., Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II 169

Hasse, Helmut, Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik . . 50

— — , Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I 55

— — , — — — II 65

— — , — — — III . . . 193

Haupt, Otto, Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung 221

Heffter, Lothar, Vom Cauchyschen Integralsatz zur Cauchyschen Integralformel . . 240

Jonas, Hans, Eine neue Eigenschaft der pseudosphärischen Strahlenkongruenzen . . 159

Lorey, Wilhelm, Josef Louis Lagrange 224

Petterson, Erik L., Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome nach einem Primzahlmodul 209

Schilling, Otto F. G., Zur algebraischen Theorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler 1

— — , Einheitentheorie in rationalen hyperkomplexen Systemen . . . 249

Schmid, Hermann Ludwig, Zyklische algebraische Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p 108

Schneider, Theodor, Über die Approximation algebraischer Zahlen 182

Scholz, Arnold, Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. I 100

Sugawara, Masao, Zur Theorie der komplexen Multiplikation. II 65

Teichmüller, Oswald, Differentialrechnung bei Charakteristik p 89

Wagner, Helmut, Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten 6

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938 . . . 252

Ausgabedaten der Hefte von Band 175.

Heft 1	ausgegeben	am 28. April	1936
Heft 2	ausgegeben	am 20. Mai	1936
Heft 3	ausgegeben	am 6. Juli	1936
Heft 4	ausgegeben	am 20. August	1936

Zur algebraischen Theorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler.

Von *Otto F. G. Schilling*, z. Zt. in Princeton.

Die folgenden Entwicklungen, die sich an eine Arbeit von Herrn F. K. Schmidt anschließen [1]), beschäftigen sich mit dem formalen Aufbau einer Art Klassenkörpertheorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler. Dabei wird mehr Gewicht gelegt auf eine Herausstellung der Voraussetzungen und Methoden, die den Aufbau ermöglichen, als auf die Einzelausführung der Beweise.

Der Hauptinhalt der Klassenkörpertheorie kann in der Charakterisierung der relativ-abelschen Körper durch Strahlklasseneinteilungen und in der genaueren Beschreibung des Zusammenhangs dieser Charakterisierung mit der Erzeugung auf Kummerscher Grundlage gesehen werden.

Aus mehrfachen Gründen ist nicht zu erwarten, daß ein Analogon in allgemeinen Körpern gefunden werden kann. Dies legen schon die Dimensionsaussage beim Riemann-Rochschen Satz für Funktionen zweier Variabler [2]) und die Nichtendlichkeit der Restklassenzahl nach einem Primdivisor nahe.

Eine Analyse der oben erwähnten Arbeit von F. K. Schmidt und einer Arbeit von M. Deuring [3]) zeigt, daß sich alle diejenigen Ergebnisse übertragen lassen müssen, die von der Kummerschen Theorie und der Eingliedrigkeit [4]) der Wertemenge einer Stelle Gebrauch machen. Setzt man noch die Theorie der quasiganzen Teilkarkeit von Idealen in ganz-abgeschlossenen Integritätsbereichen [5]) voraus, so bietet die Ausführung der algebraischen Theorie keine Schwierigkeiten mehr.

1. Vorbemerkungen.

Sei Ω ein vollkommener Körper; k ein Körper vom Transzendenzgrade m, der über einem rationalen Funktionenkörper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ von endlichem Grade sei. Unter einem *Primdivisor* (oder einer *Stelle*) $\mathfrak{p}$ von k verstehen wir einen *Homomorphismus* von k auf einen Körper vom Transzendenzgrade $m-1$, bei dem gewissen Elementen auch das Symbol ∞ zugeordnet sein kann [6]).

---

[1]) F. K. Schmidt, Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich, dieses Jounal **171** (1934), S. 162—169. Ich schließe mich an die Bezeichnungen dieser Arbeit an.

[2]) H. E. W. Jung, Der Riemann-Rochsche Satz für algebraische Funktionen zweier Veränderlicher, Jahresbericht der D. M. V. **18** (1909), S. 267—339.

[3]) M. Deuring, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Annalen **106** (1932), S. 77—102.

[4]) W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, dieses Journal **167** (1931), S. 160—196.

[5]) B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, S. 105—109; ferner: Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen **101** (1929), S. 293—308. Zur Idealtheorie der ganz abgeschlossenen Ringe, Math. Annalen **101** (1929), S. 309—311.

[6]) Vgl. Anm. 5.

In der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen kann man bekanntlich alle Stellen aus den Primidealen $\mathfrak{p}'$ von zwei ganz-abgeschlossenen Ringen erhalten [7]). Dabei ergibt sich noch, daß die so erhaltene Menge von Stellen birational invariant ist, und daß jedes Element α (bis auf Einheiten, d. h. Elemente aus dem in k algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper) eine eindeutige Darstellung $\mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{a_s}$ als endlicher Divisor der Ordnung Null hat. Der Begriff der Ordnung eines Divisors ist birational invariant.

Bei Funktionen mehrerer Variabler ist dies keineswegs der Fall. Z. B. braucht ein Element durchaus nicht mehr ein endliches Divisorenprodukt jener allgemeinen Stellen zu sein. Außerdem ist der Begriff der Ordnung nicht mehr birational invariant. Wenn man sich aber nur für algebraische Eigenschaften von Relativkörpern interessiert und Singularitätsuntersuchungen beiseite läßt, kann man mit einer engeren Menge von Stellen auskommen. Leider muß man dann auf birational invariante Definitionen verzichten. Der Begriff der Stelle wird also im folgenden von vornherein auf ein festes System transzendenter Elemente $x_1, \ldots, x_m$ bezogen.

Wir betrachten dazu die Ringe

$$\Gamma = \Omega[x_1, \ldots, x_m], \quad \Gamma_i = \Omega[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^{-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m] \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Sie sind ganz-abgeschlossen in dem gemeinsamen Quotientenkörper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$. Die bezüglich Γ, Γ_i ganzen Ringe $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_i$ aus k sind auch ganz-abgeschlossen. Den Primidealen $\mathfrak{p}'$ der Höchstdimension [8]) von $\mathfrak{o}$ lassen wir Stellen $\mathfrak{p}$ entsprechen, nämlich die Quotientenkörper $Q(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}')$, nebst dem formalen Symbol ∞, zu den Restklassenringen $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}'$. Ebenso verfahren wir mit den Primidealen der Höchstdimension der Ringe $\mathfrak{o}_i$. Durch die letzteren Primideale kommen noch endlich viele neue Homomorphismen hinzu. Diese Menge von Stellen, die von der speziellen Wahl der $x_1, \ldots, x_m$ abhängt, werde im folgenden stets zugrunde gelegt. Es sind die „Primdivisoren erster Art“ [6]).

Aus der allgemeinen Bewertungstheorie [9]) folgt sogleich, daß über $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ der Dedekindsche Diskriminantensatz (für inseparable $k/\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ seine naheliegende Verallgemeinerung) gilt. Jedem Körper kann eine endliche Diskriminante zugeordnet werden. Für separable endliche Relativkörper K/k gilt für die Erweiterung einer Stelle, wie zu erwarten, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$ mit $\Sigma e_i f_i = n$, wenn $(K : k) = n$ und $N_{K/k}\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}'^{f_i}$ ist. Nun können wir den Begriff der Ordnung eines Divisors $\mathfrak{p}$ einführen. Im Falle des rationalen Funktionenkörpers ordnen wir folgendermaßen jeder Stelle $\mathfrak{p}$ ein Symbol $o(\mathfrak{p}) = (w_1, \ldots, w_m)$ zu: Die den $\mathfrak{p}$ entsprechenden Ideale $\mathfrak{p}'$ sind bekanntlich Hauptideale; wenn etwa $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}' = (p(x_1, \ldots, x_m))$ in Γ realisiert werden kann und w_i die maximalen Exponenten von x_i in $p(x_1, \ldots, x_m)$ sind, so sei $o(\mathfrak{p}) = (w_1, \ldots, w_m)$, entsprechend für die $\mathfrak{p}_i$. Für eine Stelle $\mathfrak{P}$, die in $\mathfrak{p}$ in einem Erweiterungskörper aufgeht, sei dann $o(\mathfrak{P})$ definiert als $(w_1 f, \ldots, w_m f)$, wenn $N\mathfrak{P} = \mathfrak{p}'^f$ ist. Dieser Ordnungsbegriff ist für $m > 1$ ersichtlich nicht mehr birational invariant.

Jedes Element α aus k besitzt eine einzige Darstellung als endliches Divisorenprodukt $(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{a_s}$ und ist umgekehrt durch seinen Divisor bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt [10]).

---

[7]) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 1—32. E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen, Math. Annalen **110** (1934), S. 12—28.

[8]) B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, S. 66.

[9]) Vgl. Anm. 4.

[10]) Vgl. Anm. 5. Ich danke Herrn M. Deuring für eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Jeder solche Elementdivisor hat die Ordnung $(0, \ldots, 0)$. Im Falle des rationalen Funktionenkörpers ist umgekehrt jeder Divisor von der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ äquivalent einem Hauptdivisor. Für nicht rationale Fuktionenkörper gilt das nicht mehr. Die Gruppe der Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ bildet eine echte Obergruppe der Gruppe der Hauptdivisoren $\mathfrak{H}_k$ [11]).

2. Charakterisierung der endlichen relativ-abelschen Körper K über einem Funktionenkörper k.

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß der Konstantenkörper Ω die n-ten Einheitswurzeln enthält und daß n prim zur Charakteristik von k ist. Nach einer Bemerkung von F. K. Schmidt ist die Einheitswurzelvoraussetzung *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der folgenden Sätze. Sie ergeben sich aus der Untersuchung der Kummerschen (oder Radikal-)Körper $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$ über k und der Aufdeckung des Zusammenhangs der Verzweigungen dieser Körper mit den Teilern von α [12]).

Die Divisorengruppe $\mathfrak{G}_k$ von k ist das direkte Produkt der Pseudozyklen $\{\mathfrak{p}\}$ zu den Stellen $\mathfrak{p}$ von k. Wie bei Deuring [12]) sei $\overline{\mathfrak{G}}_k$ eine Erweiterungsgruppe von $\mathfrak{G}_k$; sie entsteht aus $\mathfrak{G}_k$, indem man endlich viele Pseudozyklen $\{\mathfrak{p}\}$ durch Zyklen $\{\overline{\mathfrak{p}}\}$ ersetzt, wo $\overline{\mathfrak{p}}^e = \mathfrak{p}$ ist und im Exponenten die Wertemenge $\mathfrak{w}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ erhalten bleibt.

Unter der Gruppe der ambigen Divisoren $\mathfrak{G}_{K/k}$ von K bezüglich k verstehen wir diejenige Untergruppe $\mathfrak{G}_{K/k}$ von $\mathfrak{G}_K$, deren Elemente bei relativen Automorphismen von K über k fest bleiben. Es ist $\mathfrak{G}_{K/k} \geqq \mathfrak{G}_k \geqq \mathfrak{H}_k$.

Die Gesamtheit $\mathfrak{R}$ aller Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ aus k, die in K Hauptdivisoren werden, ist eine Gruppe. Für gegebene abelsche Körper K/k wird dann

$$1. \quad \mathfrak{G}_{K/k} = \overline{\mathfrak{G}}_k ,$$

$$2. \quad \overline{\mathfrak{G}}_k \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{H}_k .$$

Ferner gelten die folgenden fünf Sätze, deren Beweise man mit geringfügigen Modifikationen wörtlich von M. Deuring übernehmen kann. Dabei muß man vorher feststellen, daß die Maximalitätseigenschaften des Zerlegungs- und Trägheitskörpers unter den gemachten Voraussetzungen erhalten bleiben. Wir setzen dazu voraus, daß k über einem Körper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ endlich ist, und daß der Grad n von K/k zur Charakteristik von k prim ist.

Satz 1 (Isomorphiesatz). *Die galoissche Gruppe $\mathfrak{g}_{K/k}$ ist zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}_k$ isomorph.*

Satz 2 (Hauptidealsatz). *$\mathfrak{R}$ besteht aus allen Divisoren von k, die in K Hauptdivisoren werden.*

Satz 3 (Führer- und Diskriminantensatz). *Die Gruppe der ambigen Divisoren $\mathfrak{G}_{K/k}$ ist gleich (oder abstrakt isomorph) einer wohl bestimmten Erweiterungsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_k$ von $\mathfrak{G}_k$.*

Satz 4 (Eindeutigkeitssatz). *Wird $\mathfrak{R}$ in den Körpern K und $\overline{K}$ zu Hauptidealen und hat das Kompositum $\{K, \overline{K}\}$ den gleichen Konstantenkörper Ω, so ist $\overline{K} \leqq K$.*

Satz 5 (Existenzsatz). *Zu gegebener Gruppe $\mathfrak{R}$ existiert stets ein Körper K, der die Sätze 1—4 erfüllt.*

---

[11]) Hieraus folgt (vgl. die Ausführungen unter Abschnitt 2), daß über dem rationalen Funktionenkörper (abgesehen von Erweiterungen des Konstantenkörpers) keine unverzweigten Erweiterungen existieren, und daß über den nicht rationalen Körpern dann und nur dann unverzweigte abelsche Erweiterungen existieren, wenn es Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ gibt, die bezüglich $\mathfrak{H}_k$ endliche Ordnung haben.

[12]) M. Deuring, a. a. O. [3]), § 6 Satz 9.

In der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen kann man bekanntlich alle Stellen aus den Primidealen $\mathfrak{p}'$ von zwei ganz-abgeschlossenen Ringen erhalten [7]). Dabei ergibt sich noch, daß die so erhaltene Menge von Stellen birational invariant ist, und daß jedes Element α (bis auf Einheiten, d. h. Elemente aus dem in k algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper) eine eindeutige Darstellung $\mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{a_s}$ als endlicher Divisor der Ordnung Null hat. Der Begriff der Ordnung eines Divisors ist birational invariant.

Bei Funktionen mehrerer Variabler ist dies keineswegs der Fall. Z. B. braucht ein Element durchaus nicht mehr ein endliches Divisorenprodukt jener allgemeinen Stellen zu sein. Außerdem ist der Begriff der Ordnung nicht mehr birational invariant. Wenn man sich aber nur für algebraische Eigenschaften von Relativkörpern interessiert und Singularitätsuntersuchungen beiseite läßt, kann man mit einer engeren Menge von Stellen auskommen. Leider muß man dann auf birational invariante Definitionen verzichten. Der Begriff der Stelle wird also im folgenden von vornherein auf ein festes System transzendenter Elemente $x_1, \ldots, x_m$ bezogen.

Wir betrachten dazu die Ringe

$$\Gamma = \Omega[x_1, \ldots, x_m], \quad \Gamma_i = \Omega[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^{-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m] \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Sie sind ganz-abgeschlossen in dem gemeinsamen Quotientenkörper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$. Die bezüglich Γ, Γ_i ganzen Ringe $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_i$ aus k sind auch ganz-abgeschlossen. Den Primidealen $\mathfrak{p}'$ der Höchstdimension [8]) von $\mathfrak{o}$ lassen wir Stellen $\mathfrak{p}$ entsprechen, nämlich die Quotientenkörper $Q(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}')$, nebst dem formalen Symbol ∞, zu den Restklassenringen $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}'$. Ebenso verfahren wir mit den Primidealen der Höchstdimension der Ringe $\mathfrak{o}_i$. Durch die letzteren Primideale kommen noch endlich viele neue Homomorphismen hinzu. Diese Menge von Stellen, die von der speziellen Wahl der $x_1, \ldots, x_m$ abhängt, werde im folgenden stets zugrunde gelegt. Es sind die „Primdivisoren erster Art“ [6]).

Aus der allgemeinen Bewertungstheorie [9]) folgt sogleich, daß über $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ der Dedekindsche Diskriminantensatz (für inseparable $k/\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ seine naheliegende Verallgemeinerung) gilt. Jedem Körper kann eine endliche Diskriminante zugeordnet werden. Für separable endliche Relativkörper K/k gilt für die Erweiterung einer Stelle, wie zu erwarten, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$ mit $\Sigma e_i f_i = n$, wenn $(K : k) = n$ und $N_{K/k}\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}^{f_i}$ ist. Nun können wir den Begriff der Ordnung eines Divisors $\mathfrak{p}$ einführen. Im Falle des rationalen Funktionenkörpers ordnen wir folgendermaßen jeder Stelle $\mathfrak{p}$ ein Symbol $o(\mathfrak{p}) = (w_1, \ldots, w_m)$ zu: Die den $\mathfrak{p}$ entsprechenden Ideale $\mathfrak{p}'$ sind bekanntlich Hauptideale; wenn etwa $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}' = (p(x_1, \ldots, x_m))$ in Γ realisiert werden kann und w_i die maximalen Exponenten von x_i in $p(x_1, \ldots, x_m)$ sind, so sei $o(\mathfrak{p}) = (w_1, \ldots, w_m)$, entsprechend für die $\mathfrak{p}_i$. Für eine Stelle $\mathfrak{P}$, die in $\mathfrak{p}$ in einem Erweiterungskörper aufgeht, sei dann $o(\mathfrak{P})$ definiert als $(w_1 f, \ldots, w_m f)$, wenn $N\mathfrak{P} = \mathfrak{p}^f$ ist. Dieser Ordnungsbegriff ist für $m > 1$ ersichtlich nicht mehr birational invariant.

Jedes Element α aus k besitzt eine einzige Darstellung als endliches Divisorenprodukt $(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{a_s}$ und ist umgekehrt durch seinen Divisor bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt [10]).

---

[7]) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 1—32. E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen, Math. Annalen **110** (1934), S. 12—28.

[8]) B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, S. 66.

[9]) Vgl. Anm. 4.

[10]) Vgl. Anm. 5. Ich danke Herrn M. Deuring für eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Jeder solche Elementdivisor hat die Ordnung $(0, \ldots, 0)$. Im Falle des rationalen Funktionenkörpers ist umgekehrt jeder Divisor von der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ äquivalent einem Hauptdivisor. Für nicht rationale Fuktionenkörper gilt das nicht mehr. Die Gruppe der Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ bildet eine echte Obergruppe der Gruppe der Hauptdivisoren $\mathfrak{H}_k$ [11]).

2. Charakterisierung der endlichen relativ-abelschen Körper K über einem Funktionenkörper k.

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß der Konstantenkörper Ω die n-ten Einheitswurzeln enthält und daß n prim zur Charakteristik von k ist. Nach einer Bemerkung von F. K. Schmidt ist die Einheitswurzelvoraussetzung *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der folgenden Sätze. Sie ergeben sich aus der Untersuchung der Kummerschen (oder Radikal-)Körper $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$ über k und der Aufdeckung des Zusammenhangs der Verzweigungen dieser Körper mit den Teilern von α [12]).

Die Divisorengruppe $\mathfrak{G}_k$ von k ist das direkte Produkt der Pseudozyklen $\{\mathfrak{p}\}$ zu den Stellen $\mathfrak{p}$ von k. Wie bei Deuring [12]) sei $\overline{\mathfrak{G}}_k$ eine Erweiterungsgruppe von $\mathfrak{G}_k$; sie entsteht aus $\mathfrak{G}_k$, indem man endlich viele Pseudozyklen $\{\mathfrak{p}\}$ durch Zyklen $\{\overline{\mathfrak{p}}\}$ ersetzt, wo $\overline{\mathfrak{p}}^e = \mathfrak{p}$ ist und im Exponenten die Wertemenge $\mathfrak{w}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ erhalten bleibt.

Unter der Gruppe der ambigen Divisoren $\mathfrak{G}_{K/k}$ von K bezüglich k verstehen wir diejenige Untergruppe $\mathfrak{G}_{K/k}$ von $\mathfrak{G}_K$, deren Elemente bei relativen Automorphismen von K über k fest bleiben. Es ist $\mathfrak{G}_{K/k} \geqq \mathfrak{G}_k \geqq \mathfrak{H}_k$.

Die Gesamtheit $\mathfrak{R}$ aller Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ aus k, die in K Hauptdivisoren werden, ist eine Gruppe. Für gegebene abelsche Körper K/k wird dann

$$1. \quad \mathfrak{G}_{K/k} = \overline{\mathfrak{G}}_k ,$$

$$2. \quad \overline{\mathfrak{G}}_k \geqq \mathfrak{R} \geqq \mathfrak{H}_k .$$

Ferner gelten die folgenden fünf Sätze, deren Beweise man mit geringfügigen Modifikationen wörtlich von M. Deuring übernehmen kann. Dabei muß man vorher feststellen, daß die Maximalitätseigenschaften des Zerlegungs- und Trägheitskörpers unter den gemachten Voraussetzungen erhalten bleiben. Wir setzen dazu voraus, daß k über einem Körper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ endlich ist, und daß der Grad n von K/k zur Charakteristik von k prim ist.

Satz 1 (Isomorphiesatz). *Die galoissche Gruppe $\mathfrak{g}_{K/k}$ ist zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}_k$ isomorph.*

Satz 2 (Hauptidealsatz). *$\mathfrak{R}$ besteht aus allen Divisoren von k, die in K Hauptdivisoren werden.*

Satz 3 (Führer- und Diskriminantensatz). *Die Gruppe der ambigen Divisoren $\mathfrak{G}_{K/k}$ ist gleich (oder abstrakt isomorph) einer wohl bestimmten Erweiterungsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_k$ von $\mathfrak{G}_k$.*

Satz 4 (Eindeutigkeitssatz). *Wird $\mathfrak{R}$ in den Körpern K und $\overline{K}$ zu Hauptidealen und hat das Kompositum $\{K, \overline{K}\}$ den gleichen Konstantenkörper Ω, so ist $\overline{K} \leqq K$.*

Satz 5 (Existenzsatz). *Zu gegebener Gruppe $\mathfrak{R}$ existiert stets ein Körper K, der die Sätze 1—4 erfüllt.*

---

[11]) Hieraus folgt (vgl. die Ausführungen unter Abschnitt 2), daß über dem rationalen Funktionenkörper (abgesehen von Erweiterungen des Konstantenkörpers) keine unverzweigten Erweiterungen existieren, und daß über den nicht rationalen Körpern dann und nur dann unverzweigte abelsche Erweiterungen existieren, wenn es Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ gibt, die bezüglich $\mathfrak{H}_k$ endliche Ordnung haben.

[12]) M. Deuring, a. a. O. [3]), § 6 Satz 9.

Diese Sätze stellen ein Analogon zur Klassenkörpertheorie dar, soweit diese aus der Theorie der Kummerschen Körper und den arithmetischen Eigenschaften der Stellen abgeleitet werden kann. Die Zahlengruppen, die den relativ- abelschen Körpern K/k invariant zugeordnet werden können, werden in die formal einfacheren Divisorengruppen umgedeutet; einfacher wegen der Homogenität der Eigenschaften der Stellen.

Neben dieser Theorie, die eine Darstellung der galoisschen Gruppe durch Divisorengruppen im Grundkörper und damit den Isomorphie- und Existenzsatz zum Ziele hat, kann unter bestimmten Voraussetzungen über den Konstantenkörper Ω das Analogon zum Zerlegungssatz bzw. Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie in den Vordergrund gerückt werden.

3. Kennzeichnung der galoisschen Körper durch Normalmengen.

Wie in der am Anfang erwähnten Arbeit von F. K. Schmidt wollen wir annehmen, daß über Ω der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt. Gilt dieser Satz für eine Variable, so auch für mehrere [13]). Hiervon gehen wir aus.

Sei N über k galoissch und $\mathfrak{G}$ die zugehörige Gruppe. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes [14]):

Satz C. *Die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen aller Primdivisoren von N stimmt mit der Gesamtheit der Untergruppen von $\mathfrak{G}$ überein.*

Beweis: 1. Die Dedekindsche Regel gilt wegen der arithmetischen Eigenschaften der Stellen (Existenz des Primelementes und eines perfekten Körpers).

Wenn $K \geqq K' = k(\vartheta) \geqq k \geqq \Omega(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{P}$ eine Stelle von K ist, so ist $(\vartheta) = \mathfrak{P}^e \cdot \mathfrak{R}$ mit $e \geqq 0$ und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}) = 1$. Falls die Diskriminante $\Delta_k(\vartheta)$ nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar wird, so wird $(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\vartheta}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}})$.

2. (Verallgemeinerung des Lemmas in der Arbeit von F. K. Schmidt.) K ist stets über einem passenden rationalen Funktionenkörper $k' = \Omega(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ endlich und separabel.

Es existieren unendlich viele Stellen $\mathfrak{P}$ von K mit

a) $\eta_1 \equiv a_1 \pmod{\mathfrak{P}}$, wobei $a_1 \in \Omega$;

$\eta_i \equiv \tilde{\eta}_i \pmod{\mathfrak{P}}$ $[i = 2, \ldots, m]$, wobei die $\tilde{\eta}_i \neq \infty$ aus $\tilde{k}'_{\mathfrak{P}}$ und unabhängige transzendente Elemente sind.

b) $(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (K : k')$.

Sei nämlich

$$F(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) = x^r + A_1(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, x^{r-1} + \cdots + A_r(\eta_1, \ldots, \eta_m)$$

mit $a_i(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ aus $\Omega[\eta_1, \ldots, \eta_m]$ ein definierendes irreduzibles Polynom von K über $\Omega(\eta_1, \ldots, \eta_m) = k'$. Weiter sei φ eine Nullstelle, $F(\varphi, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0$, also $K = k'(\varphi)$.

Über Ω gilt nach Voraussetzung der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz. Es gibt also unendliche viele Elemente a aus Ω derart, daß bei Ersetzung von η_1 durch a in Ω aus $F(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ ein über Ω irreduzibles Polynom $F(x, a, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ hervorgeht.

Jedem solchen Elemente a ordnen wir einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K zu, so daß $\eta_1 - a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ ist. Es sind nur diejenigen endlich vielen Stellen $\mathfrak{P}$ auszuschließen, für die $\mathfrak{P}/\Delta_k(\varphi)$ oder $\varphi \equiv \infty \pmod{\mathfrak{P}}$ wird.

Diese Stellen $\mathfrak{P}$ erfüllen a); denn es ist $\eta_1 \equiv a \pmod{\mathfrak{P}}$, $a \in \Omega$, und $\eta_i \equiv \tilde{\eta}_i \pmod{\mathfrak{P}}$,

---

[13]) W. Franz, Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 275—293.

[14]) Zur Benennung des Satzes vgl. die Arbeit von F. K. Schmidt, a. a. O. [1]).

wo die $\tilde{\eta}_i$ unabhängige transzendente Elemente im Restklassenkörper sind; $\mathfrak{P}$ teilt allein $\eta_1 - a$. [Einschränkung der Menge der Stellen bezüglich $\eta_1, \ldots, \eta_m$.]

Nach der Wahl von $\mathfrak{P}$ ist φ endlich für $\mathfrak{P}$,

$$\Delta_k(\varphi) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Aus der Dedekindschen Regel ergibt sich demnach

$$(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) . \tag{1}$$

Außerdem wird

$$0 = F(\varphi, \eta_1, \ldots, \eta_m) \equiv F(\varphi, a, \eta_2, \ldots, \eta_m) \equiv F(\varphi, a, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m) \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Das Polynom $F(\varphi, a, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ ist über Ω und $\Omega(\tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m) \cong \Omega(\eta_2, \ldots, \eta_m)$ irreduzibel, d. h. φ ist eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $F(x, a, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m)$ mod $\mathfrak{P}$.

Überdies ist

$$\Omega(\eta_i, \ldots, \eta_m) \equiv \Omega(\tilde{\eta}_i, \ldots, \tilde{\eta}_m) \equiv \Omega\overline{(\eta_i, \ldots, \eta_m)} \pmod{\mathfrak{P}} \qquad [i = 2, \ldots, m]$$

und $\Omega \equiv \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}} \pmod{\mathfrak{P}}$. Wegen $\tilde{\eta}_{1\mathfrak{P}} = a_{\mathfrak{P}} \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$ ist $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}(\eta_{1\mathfrak{P}}) = \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$, und da

$$\tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}} \leqq \Omega\overline{(\eta_i, \ldots, \eta_m)}_{\mathfrak{P}} \leqq \Omega\overline{(\eta_{i-1}, \ldots, \eta_m)}_{\mathfrak{P}}$$

ist, so bleibt $F(x, a, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m)$ auch über $k' = \Omega(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ mod $\mathfrak{P}$ irreduzibel.

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) &= \operatorname{grad}_x (F(x, a, \eta_2, \ldots, \eta_m)) \\ &= \operatorname{grad}_x (F(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)) \\ &= (K : k') . \end{aligned} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt aber sogleich b).

Damit ist der Beweis von Satz C beendet. Nun ergeben sich in sinngemäßer Verallgemeinerung die von F. K. Schmidt für Funktionenkörper einer Variablen gefundenen Resultate:

Eindeutigkeitssatz. *Jeder Normalkörper N/k ist durch seinen Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(N)$ eindeutig bestimmt.*

Bauerscher Satz. *Die Relationen $\mathfrak{R}(N) \geqq \mathfrak{R}(K)$ und $N \leqq K$ bedingen sich gegenseitig.*

Leider gelingt in der Theorie der algebraischen Funktionen nur in Sonderfällen eine Zusammenfassung all dieser Einzelergebnisse zu einem Reziprozitätsgesetz, wie es von der Zahlentheorie her bekannt ist. Immerhin sind durch die obigen Untersuchungen die wesentlichen algebraischen Eigenschaften jener allgemeinen Körperklasse festgestellt.

The Institute for Advanced Study, Princeton (N. J.), U. S. A.

Eingegangen 3. September 1935.

Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten.*)

Von *Helmut Wagner* in Göttingen.

Einleitung.

Herr R. Nevanlinna hat eine neue Klasse von meromorphen Funktionen eingehend untersucht [1]). Es sind dies die Funktionen, welche die schlichte endliche Ebene auf Riemannsche Flächen mit nur logarithmischen Windungspunkten, und zwar mit nur endlich vielen, abbilden. Herr R. Nevanlinna hat darüber folgende Hauptergebnisse gewonnen:

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q \geqq 3)$ willkürlich gegebene, voneinander verschiedene Punkte der w-Ebene. Jedem Punkt a_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ sei eine natürliche Zahl μ_k willkürlich so zugeordnet, daß

$$\mu_k \leqq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q} \mu_j = \frac{p}{2} \tag{1}$$

ist. Dann gibt es mindestens eine meromorphe Funktion $w(z)$, welche die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche abbildet, die über jedem der Punkte a_k außer möglicherweise gewissen schlichten Blättern genau μ_k logarithmische Windungspunkte hat, sonst aber keine (auch keine algebraischen) Windungspunkte mehr besitzt, so daß die Gesamtzahl der (logarithmischen) Windungspunkte $\sum_{j=1}^{q}\mu_j = p$ beträgt. Für $p = 3$ ist diese Funktion im wesentlichen, d. h. bis auf eine ganze lineare Transformation von z, eindeutig bestimmt; für jedes $p \geqq 4$ aber gibt es unendlich viele wesentlich verschiedene Funktionen $w(z)$, die sich dadurch unterscheiden, daß die von ihnen über der w-Ebene erzeugten Riemannschen Flächen trotz der gleichen Windungspunkte noch verschiedene Struktur haben [2]). Jede solche Funktion $w(z)$ hat die Ordnung $\frac{p}{2}$ und besitzt die Werte a_k als einzige Ausnahmewerte, und zwar sind die entsprechenden Defekte gleich $\frac{2\mu_k}{p}$, so daß die Summe aller Defekte ihr Maximum 2 erreicht. Ferner genügt $w(z)$ der

---

*) Diese Arbeit wurde der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen als Dissertation vorgelegt. Referent war Herr Dozent Dr. Ullrich.

[1]) R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta mathematica **58** (1932), S. 295—373.

[2]) Falls die Anzahl q der gegebenen Grundpunkte a_k gleich zwei ist, so ist die (für $q \geqq 3$ notwendige und hinreichende) Bedingung (1) nicht mehr hinreichend. Vielmehr ist dann notwendigerweise auch $p = 2$, also $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Die Funktion $w(z)$ ist wie im Falle $p = 3$ im wesentlichen eindeutig bestimmt und läßt sich in einfacher Weise als lineare Transformation der Exponentialfunktion darstellen. Die über der w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ist die bekannte logarithmische Fläche.

Differentialgleichung

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = P(z), \tag{2}$$

wo $P(z)$ ein Polynom vom Grade $p - 2$ ist. Wenn umgekehrt $P(z)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $p - 2$ ist, so ist jede Lösung der Differentialgleichung (2) eine in der endlichen Ebene meromorphe Funktion der Ordnung $\frac{p}{2}$, die über der w-Ebene eine Riemannsche Fläche erzeugt mit genau p logarithmischen und sonst keinen Windungspunkten derart, daß die Anzahl der über einem und demselben Grundpunkt liegenden logarithmischen Windungspunkte nicht größer als $\frac{p}{2}$ ist.

Im Anschluß an diese Hauptergebnisse von Herrn R. Nevanlinna erheben sich nun die Fragen: Über welchen Stellen der w-Ebene liegen bei gegebenem Polynom $P(z)$ die logarithmischen Windungspunkte der Riemannschen Fläche, die als Bild der schlichten z-Ebene von einer bestimmten Lösung $w(z)$ der Gleichung (2) über der w-Ebene erzeugt wird, und wie ist die Struktur dieser Riemannschen Fläche?

Herr R. Nevanlinna selbst hat diese Fragen schon für die einfachsten Spezialfälle von $P(z)$ erledigt, nämlich erstens für den Fall, daß $P(z)$ eine reine Potenz von z ist [3]), und zweitens für den Fall, daß $P(z)$ ein quadratisches Polynom in z ist [4]). Als wichtigstes Hilfsmittel bei der Behandlung dieser einfachsten Fälle verwendet er die Laplacesche Transformation zur Integration der Gleichung

$$g'' + \frac{1}{2} P(z)\, g = 0\,, \tag{3}$$

welche in enger Beziehung zur Gleichung (2) steht.

Eine Untersuchung der Frage, ob es etwa noch allgemeinere Polynome $P(z)$ gibt, bei denen man ebenfalls mit Hilfe der Laplaceschen Transformation zum Ziele kommt, zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Und zwar ergibt sich, falls p eine gerade Zahl ($p = 2n$, $n \geqq 2$) ist,

$$P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2} \qquad (M \neq 0) \tag{4}$$

als nächstliegende Verallgemeinerung der im vorigen Abschnitt erwähnten einfachsten Polynome.

In dieser Arbeit wollen wir nun die oben gestellten Fragen an dem neuen Spezialfall (4) von $P(z)$ behandeln. Auch in diesem Falle lassen sich alle Rechnungen zur Bestimmung der Lage der logarithmischen Windungspunkte wirklich bis zu Ende durchführen, und zwar zeigt sich, daß sich die Lage der logarithmischen Windungspunkte explizite mit Hilfe der Gammafunktion angeben läßt. Die Frage nach der Struktur der Riemannschen Fläche werden wir für gewisse ausgezeichnete Fälle vollständig lösen, nämlich dann, wenn das Polynom (4) so beschaffen ist, daß von den $2n$ logarithmischen Windungspunkten n über eine und dieselbe Stelle zu liegen kommen. In den übrigen Fällen gelingt es uns, Aussagen zu gewinnen, die über die allgemeinen Nevanlinnaschen Sätze nicht unerheblich hinausgehen.

---

[3]) R. Nevanlinna, Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen, Acta mathematica **55** (1930), S. 259—276.

[4]) Vgl. die schon in Fußnote [1]) genannte Abhandlung.

Teil 1. Vorbereitende Betrachtungen.

§ 1. *Darstellung der Nevanlinnaschen Funktionen als Quotienten zweier nullstellenfremden ganzen Funktionen.*

Um die in der Einleitung geschilderten Nevanlinnaschen Funktionen darzustellen, geht man von der Differentialgleichung

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = P(z) \tag{2}$$

aus. Setzt man $w' = g^{-2}$, so geht (2) über in die Differentialgleichung

$$g'' + \frac{1}{2} P(z)\, g = 0\,, \tag{3}$$

und es gilt:

Der Quotient von zwei beliebigen linear unabhängigen Lösungen von (3) ist eine Lösung von (2), und umgekehrt läßt sich jede Lösung von (2) als Quotient von zwei linear unabhängigen Lösungen von (3) darstellen.

Hierdurch ist die Darstellung der Nevanlinnaschen Funktionen auf die Integration der Gleichung (3) zurückgeführt. Jede Lösung von (3) ist eine ganze Funktion $\left(\text{der Ordnung } \frac{p}{2}\right)$ und läßt sich durch eine beständig konvergente Potenzreihe darstellen. Wir wollen daher zunächst ganz allgemein g in Form einer Potenzreihe ansetzen. Es sei

$$P(z) = -2\sum_{j=0}^{p-2} b_j z^j\,, \tag{5}$$

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j\,,$$

also

$$g'' = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\, c_j z^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)\,(j+1)\, c_{j+2} z^j\,.$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Gleichung (3), so ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2\cdot 1\cdot c_2 - b_0 c_0 = 0 \\ 3\cdot 2\cdot c_3 - b_0 c_1 - b_1 c_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p(p-1)\, c_p \quad - b_0 c_{p-2} - \cdots - b_{p-2} c_0 = 0 \\ (p+1)\, p\, c_{p+1} - b_0 c_{p-1} - \cdots - b_{p-2} c_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{6}$$

Nachdem man c_0 und c_1 willkürlich festgesetzt hat, lassen sich aus (6) die übrigen Koeffizienten $c_2, c_3, \dots$ eindeutig ermitteln. Wir bestimmen zwei linear unabhängige Lösungen von (3) durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} G^*(z) &= c_0^* + c_1^* z + \cdots \\ G^{**}(z) &= c_0^{**} + c_1^{**} z + \cdots \end{aligned} \qquad (c_1^* c_0^{**} - c_1^{**} c_0^* \neq 0)\,.$$

Dann ist $w(z) = \dfrac{G^*(z)}{G^{**}(z)}$ die Darstellung der Nevanlinnaschen Funktionen als Quotienten zweier nullstellenfremder ganzer Funktionen.

Insbesondere heben wir die Lösungen

$$g^*(z) = 0 + 1\cdot z + \cdots, \qquad g^{**}(z) = 1 + 0\cdot z + \cdots$$

heraus und nennen

$$w(z) = \frac{g^*(z)}{g^{**}(z)} = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \cdots$$

die *Grundlösung* von (2).

Wir werden unsere späteren Untersuchungen, insbesondere die Bestimmung der Lage der logarithmischen Windungspunkte, nur für die Grundlösung von (2) durchführen. Dies bedeutet keine Einschränkung; denn die allgemeine Lösung von (2) ist nichts anderes als eine lineare Transformation der Grundlösung.

§ 2. *Normierung von* $P(z)$ *zu* $-2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$.

Es sei nun, um zu unserem Spezialfall überzugehen,

$$p = 2n \quad (n \text{ ganz und } \geqq 2),$$

$$P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2} \quad (M \neq 0), \tag{4}$$

also (vgl. (5))

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-3} = 0, \quad b_{n-2} = N,$$
$$b_{n-1} = b_n = \cdots = b_{2n-3} = 0, \quad b_{2n-2} = M.$$

Dann lauten die Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2}, \tag{7}$$

$$g'' - (Mz^{2n-2} + Nz^{n-2})\, g = 0. \tag{8}$$

Wir wollen, um auch die Abhängigkeit von n, M und N zum Ausdruck zu bringen, die Lösungen g^*, g^{**} von (8) und die Grundlösung w von (7) ausführlich bezeichnen mit

$$g_n^*(z; M, N), \quad g_n^{**}(z; M, N), \quad w_n(z; M, N).$$

Setzt man

$$g_n^*(z; M, N) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^* z^j \quad (c_0^* = 0, \ c_1^* = 1),$$

$$g_n^{**}(z; M, N) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{**} z^j \quad (c_0^{**} = 1, \ c_1^{**} = 0),$$

so ist, wie aus den Gleichungen (6) folgt,

$$c_j^* = 0 \text{ für } j \not\equiv 1 \pmod{n},$$
$$c_j^{**} = 0 \text{ für } j \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Ferner ergibt sich nach (6) für die Koeffizienten c_j^* mit $j \equiv 1 \pmod{n}$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} (n+1)\, n\, c_{n+1}^* - N c_1^* = 0 \\ (2n+1)\ 2n\, c_{2n+1}^* - N c_{n+1}^* - M c_1^* = 0 \\ (3n+1)\ 3n\, c_{3n+1}^* - N c_{2n+1}^* - M c_{n+1}^* = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{9}$$

und für die Koeffizienten c_j^{**} mit $j \equiv 0 \pmod{n}$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} n(n-1)\, c_n^{**} - N c_0^{**} = 0 \\ 2n(2n-1)\, c_{2n}^{**} - N c_n^{**} - M c_0^{**} = 0 \\ 3n(3n-1)\, c_{3n}^{**} - N c_{2n}^{**} - M c_n^{**} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{10}$$

Daher ist für $k = 1, 2, 3, \ldots$ sowohl c^*_{kn+1} als auch c^{**}_{kn} ein Polynom in M und N, welches, aufgefaßt als Polynom in $\sqrt{M}$ und N, homogen vom Grade k ist. Sowohl in c^*_{kn+1} als auch in c^{**}_{kn} tritt N entweder nur in geraden oder nur in ungeraden Potenzen auf, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Somit erfüllen die Lösungen

$$(11)\qquad \begin{cases} g^*_n(z;\, M, N) = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c^*_{kn+1} z^{kn+1} \\ g^{**}_n(z;\, M, N) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c^{**}_{kn} z^{kn} \end{cases}$$

der Gleichung (8) die Beziehungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} g^*_n(z;\, M, N) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{M}}}\, g^*_n\left(\sqrt[n]{\sqrt{M}}\, z;\, 1,\, \dfrac{N}{\sqrt{M}}\right), \\ g^{**}_n(z;\, M, N) = \quad g^{**}_n\left(\sqrt[n]{\sqrt{M}}\, z;\, 1,\, \dfrac{N}{\sqrt{M}}\right); \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} g^*_n\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z;\, M, N\right) = e^{\frac{\pi i}{n}}\, g^*_n(z;\, M, -N), \\ g^{**}_n\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z;\, M, N\right) = \quad g^{**}_n(z;\, M, -N). \end{cases}$$

Durch zweimalige Anwendung von (13) erhält man

$$\begin{cases} g^*_n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z;\, M, N\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}}\, g^*_n(z;\, M, N), \\ g^{**}_n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z;\, M, N\right) = \quad g^{**}_n(z;\, M, N), \end{cases}$$

was übrigens auch unmittelbar aus (11) ersichtlich ist.

Hieraus ergeben sich für die Grundlösung $w_n = \dfrac{g^*_n}{g^{**}_n}$ der Gleichung (7) die Beziehungen:

$$(14)\qquad w_n(z;\, M, N) \quad = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{M}}}\, w_n\left(\sqrt[n]{\sqrt{M}}\, z;\, 1,\, \frac{N}{\sqrt{M}}\right),$$

$$(15)\qquad w_n\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z;\, M, N\right) = e^{\frac{\pi i}{n}}\, w_n(z;\, M, -N),$$

$$(16)\qquad w_n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z;\, M, N\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}}\, w_n(z;\, M, N)\,.$$

In (14) kann, ebenso wie oben in (12), $\sqrt{M}$ jeden der beiden Werte und, nachdem $\sqrt{M}$ fest gewählt ist, $\sqrt[n]{\sqrt{M}}$ jeden der n Werte bedeuten.

Wir wollen nun für das Folgende $P(z)$ zu $-2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$ normieren. Dies ist keine wesentliche Einschränkung. Denn Gleichung (14) gestattet uns, alle für $P(z) = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$ gewonnenen Ergebnisse ohne Mühe auf den allgemeinen Fall $P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2}$ zu übertragen. Der Einfachheit halber wollen wir die im normierten Falle auftretenden Funktionen

$$g^*_n(z;\, 1, c), \qquad g^{**}_n(z;\, 1, c), \qquad w_n(z;\, 1, c)$$

kurz mit

$$g^*_n(z, c), \qquad g^{**}_n(z, c), \qquad w_n(z, c)$$

bezeichnen. Da wir die Gleichungen (7), (8), (15), (16) später nur im Falle

$$P(z) = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$$

anwenden werden, wollen wir sie hier noch einmal besonders für diesen Fall anschreiben:

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}, \tag{17}$$

$$g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2})g = 0, \tag{18}$$

$$w_n\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z, c\right) = e^{\frac{\pi i}{n}} w_n(z, -c), \tag{19}$$

$$w_n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z, c\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}} w_n(z, c). \tag{20}$$

Dann brauchen wir später bloß hierauf zu verweisen.

§ 3. $g_n^*(z, c)$, $g_n^{**}(z, c)$ und $w_n(z, c)$ als Funktionen von z und c.

$g_n^*(z, c)$ und $g_n^{**}(z, c)$ sind, da sie die Differentialgleichung (18) befriedigen, bei festem c ganze Funktionen von z, und zwar gelten die Entwicklungen

$$g_n^*(z, c) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^* z^{kn+1},$$

$$g_n^{**}(z, c) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**} z^{kn},$$

wo die Koeffizienten c_{kn+1}^* und c_{kn}^{**} den Gleichungen (vgl. (9) und (10))

$$\begin{cases} (n+1)\, n c_{n+1}^* - c = 0 \\ (2n+1)\, 2n c_{2n+1}^* - c c_{n+1}^* - 1 = 0 \\ (3n+1)\, 3n c_{3n+1}^* - c c_{2n+1}^* - c_{n+1}^* = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} n(n-1)\, c_n^{**} - c = 0 \\ 2n(2n-1)\, c_{2n}^{**} - c c_n^{**} - 1 = 0 \\ 3n(3n-1)\, c_{3n}^{**} - c c_{2n}^{**} - c_n^{**} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{22}$$

genügen.

Wir werden nun zeigen, daß $g_n^*(z, c)$ und $g_n^{**}(z, c)$ bei festem z auch ganze Funktionen von c sind.

Wie aus den Gleichungen (21) und (22) zu ersehen ist, sind die Koeffizienten $c_{kn+1}^* = c_{kn+1}^*(c)$ und $c_{kn}^{**} = c_{kn}^{**}(c)$ Polynome in c mit positiv reellen Koeffizienten. Daher gilt, wenn Q eine beliebige positiv reelle Zahl ist, für $|c| \leqq Q$:

$$|c_{kn+1}^*(c)| \leqq c_{kn+1}^*(Q); \quad |c_{kn}^{**}(c)| \leqq c_{kn}^{**}(Q).$$

Infolgedessen sind die Reihen

$$|z| + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^*(Q)\, |z|^{kn+1} = g_n^*(|z|, Q),$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**}(Q)\, |z|^{kn} = g_n^{**}(|z|, Q)$$

für $|c| \leqq Q$ Majoranten der Reihen

$$z + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^*(c) z^{kn+1} = g_n^*(z, c),$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**}(c) z^{kn} = g_n^{**}(z, c),$$

und diese konvergieren daher bei festem z für $|c| \leqq Q$ gleichmäßig in c. Wie der Weierstraßsche Doppelreihensatz lehrt, sind somit ihre Summen $g_n^*(z, c)$ und $g_n^{**}(z, c)$ bei festem z für $|c| < Q$ regulär analytische Funktionen von c. Hiermit ist, da man ja Q beliebig groß wählen kann, die Behauptung bewiesen. Zusammenfassend hat man also das Ergebnis:

Die Lösungen $g_n^*(z, c)$ und $g_n^{**}(z, c)$ von (18) *sind bei festem c ganze Funktionen von z und bei festem z ganze Funktionen von c; die Grundlösung $w_n(z, c)$ von* (17) *ist bei festem c eine meromorphe Funktion von z und bei festem z eine meromorphe Funktion von c.*

Teil 2. Die Lage der logarithmischen Windungspunkte.

§ 4. *Integration der Gleichung $g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2})\, g = 0$ mit Hilfe der Laplaceschen Transformation.*

Um weitere Schlüsse über die Grundlösung $w_n(z, c)$ von (17) ziehen zu können, wollen wir die Gleichung

$$g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2}) g = 0 \tag{18}$$

mit Hilfe der Laplaceschen Transformation integrieren.

Wir führen zunächst durch

$$x = \frac{2}{n} z^n \tag{23}$$

die neue unabhängige Veränderliche x ein. Dann wird

$$g'' = \frac{d^2 g}{dz^2} = 4z^{2n-2} \frac{d^2 g}{dx^2} + (2n - 2)\, z^{n-2} \frac{dg}{dx},$$

und Gleichung (18) geht über in

$$4z^{2n-2} \frac{d^2 g}{dx^2} + (2n - 2) z^{n-2} \frac{dg}{dx} - (z^{2n-2} + cz^{n-2})\, g = 0$$

oder

$$x \frac{d^2 g}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{dg}{dx} - \left(\frac{1}{4}\, x + \frac{c}{2n}\right) g = 0\,. \tag{24}$$

Macht man zur Lösung von (24) den Ansatz

$$g = \int_\alpha^\beta e^{tx} u(t)\, dt\,, \tag{25}$$

wo $u(t)$ eine noch zu bestimmende Funktion und α und β noch zu bestimmende Integrationsgrenzen bedeuten, so ist unter der Annahme, daß man in (25) unter dem Integralzeichen differenzieren darf,

$$\frac{dg}{dx} = \int_\alpha^\beta t e^{tx} u\, dt\,, \qquad \frac{d^2 g}{dx^2} = \int_\alpha^\beta t^2 e^{tx} u\, dt\,,$$

und, wie sich durch partielle Integration ergibt,

$$x g = e^{tx} u \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{tx} \frac{du}{dt}\, dt\,,$$

$$x \frac{d^2 g}{dx^2} = t^2 e^{tx} u \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{tx} \left(t^2 \frac{du}{dt} + 2tu\right) dt\,.$$

Hiermit lautet Gleichung (24):

$$(26)\quad -\int_{\alpha}^{\beta} e^{tx}\left\{t^2\frac{du}{dt}+2tu-\left(1-\frac{1}{n}\right)tu-\frac{1}{4}\frac{du}{dt}+\frac{c}{2n}u\right\}dt+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)e^{tx}u\Big|_{\alpha}^{\beta}=0\,.$$

Damit (25) eine Lösung von (24) wird, bestimmen wir $u(t)$ so, daß in dem in (26) auftretenden Integral die geschweifte Klammer identisch verschwindet. Als Lösung der Differentialgleichung

$$\left(t^2-\frac{1}{4}\right)\frac{du}{dt}+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t+\frac{c}{2n}\right)u=0$$

erhält man demnach für $u(t)$:

$$u(t)=\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b,$$

wo zur Abkürzung

$$(27)\qquad \frac{c-1}{2n}-\frac{1}{2}=a,\qquad \frac{-c-1}{2n}-\frac{1}{2}=b$$

gesetzt ist.

Da $u(t)$ eine mehrdeutige Funktion von t ist, wollen wir sogleich einen eindeutigen Zweig festlegen. Zu diesem Zweck denken wir uns die t-Ebene vom Punkte $t=-\frac{1}{2}$ an längs der negativ reellen Achse bis ins Unendliche und vom Punkte $t=+\frac{1}{2}$ an längs der positiv reellen Achse bis ins Unendliche aufgeschlitzt. Es sei

$$\frac{1}{2}+t=e^{\log\left|\frac{1}{2}+t\right|+i\varphi},\qquad \frac{1}{2}-t=e^{\log\left|\frac{1}{2}-t\right|+i\psi},$$

wobei unter $\log\left|\frac{1}{2}+t\right|$ bzw. unter $\log\left|\frac{1}{2}-t\right|$ der reelle Wert zu verstehen ist. Dann wird

$$u(t)=e^{a\log\left|\frac{1}{2}+t\right|+ia\varphi}\cdot e^{b\log\left|\frac{1}{2}-t\right|+ib\psi},$$

und wir wollen bei unseren folgenden Betrachtungen den durch die Ungleichungen

$$-\pi<\varphi<\pi,\qquad -\pi<\psi<\pi$$

festgelegten eindeutigen Zweig von $u(t)$ zugrunde legen. Für später wollen wir noch anmerken, daß dann den Punkten des unteren Schnittufers der negativ reellen Achse die Argumente $\varphi=-\pi$, $\psi=0$, den Punkten des oberen Schnittufers der negativ reellen Achse die Argumente $\varphi=\pi$, $\psi=0$ entsprechen.

Nun haben wir im Integral (25) noch einen geeigneten Integrationsweg zu bestimmen. Beschränkt man x auf die rechte Halbebene $\Re x>0$, so strebt der Ausdruck (vgl. (26))

$$\left(t^2-\frac{1}{4}\right)e^{tx}u=-\left(\frac{1}{2}+t\right)^{a+1}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{b+1}e^{tx}$$

gegen 0, wenn t längs eines der beiden Schnittufer der negativ reellen Achse über alle Grenzen wächst. Daher kann man im Integral (25) sowohl α als auch β gleich $-\infty$ wählen. Damit nun das Integral (25) nicht identisch verschwindet, nehmen wir den folgenden aus drei Stücken bestehenden Integrationsweg $\mathfrak{S}_\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$: Das erste

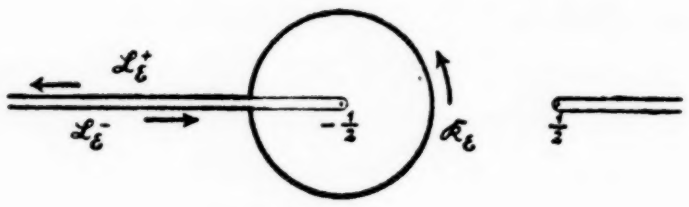


Fig. 1.

Stück $\mathfrak{L}_\varepsilon^-$ gehe von $-\infty$ längs des unteren Schnittufers der negativ reellen Achse bis zum Punkte $t = -\frac{1}{2} - \varepsilon$. Das zweite Stück $\mathfrak{K}_\varepsilon$ sei die im positiven Sinne vom Punkte $t = -\frac{1}{2} - \varepsilon$ des unteren Schnittufers bis zum Punkte $t = -\frac{1}{2} - \varepsilon$ des oberen Schnittufers durchlaufene Kreislinie $\left|t + \frac{1}{2}\right| = \varepsilon$. Das dritte Stück $\mathfrak{L}_\varepsilon^+$ gehe vom Punkte $t = -\frac{1}{2} - \varepsilon$ längs des oberen Schnittufers der negativ reellen Achse bis $-\infty$ (vgl. Fig. 1).

Nunmehr erkennt man, daß das Integral

$$I_n(x, c) = \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} e^{tx} \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt \tag{28}$$

für $\Re x > 0$ bei beliebigem c eine Lösung der Gleichung (24) darstellt, vorläufig allerdings noch unter der Annahme, daß man es unter dem Integralzeichen nach x differenzieren darf.

Wir wollen nun zeigen, daß man das uneigentliche Integral $I_n(x, c)$ tatsächlich unter dem Integralzeichen nach x differenzieren darf. Dabei werden wir gleichzeitig noch einige weitere Aussagen über $I_n(x, c)$ gewinnen, die wir später benötigen werden. Wir stützen uns hierbei auf folgenden Satz: [5])

Es sei $\mathfrak{S}$ eine in der t-Ebene gelegene streckbare Kurve und $\mathfrak{G}$ ein in der x-Ebene gelegenes Gebiet. $f(t, x)$ sei für jedes auf $\mathfrak{S}$ gelegene t eine in $\mathfrak{G}$ regulär analytische Funktion von x und innerhalb $\mathfrak{G}$ gleichmäßig beschränkt. Dann stellt das Integral $\int_{\mathfrak{S}} f(t, x)\,dt$ (falls es für jedes x aus $\mathfrak{G}$ im eigentlichen Riemannschen Sinne existiert) eine in $\mathfrak{G}$ regulär analytische Funktion von x dar.

Es sei nun für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\alpha_\nu < -\frac{1}{2} - \varepsilon, \qquad \beta_\nu < -\frac{1}{2} - \varepsilon,$$

und es strebe $\alpha_\nu \to -\infty$, $\beta_\nu \to -\infty$ für $\nu \to \infty$. Den Punkt $t = \alpha_\nu$ denken wir uns auf dem unteren Schnittufer, den Punkt $t = \beta_\nu$ auf dem oberen Schnittufer liegend. Dann stellt nach obigem Satze für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ das Integral

$$I_{n,\nu} = \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} e^{tx} \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt,$$

welches über das zwischen den Punkten $t = \alpha_\nu$ und $t = \beta_\nu$ gelegene Stück des Weges $\mathfrak{S}_\varepsilon$ zu erstrecken ist, bei festem c eine ganze Funktion von x und bei festem x eine ganze Funktion von c dar, und es strebt für $\nu \to \infty$

$$I_{n,\nu} \to I_n \quad \text{für} \quad \Re x > 0.$$

---

[5]) Siehe z. B. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **1**, Leipzig u. Berlin 1930, S. 135 u. 174.

Nun ist für $\Re x \geqq 0$

$$|I_{n,\nu}| \leqq \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \left| e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b\right| |dt| = \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} + \int_{\mathfrak{K}_\varepsilon} + \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+}.$$

Beschränkt man x auf den Kreis $|x-\xi| \leqq \xi$ $(\xi>0)$ und c auf den Kreis $|c| \leqq Q$ $(Q>0)$, so ist auf $\mathfrak{K}_\varepsilon$ der Integrand $\left| e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b\right|$ beschränkt und somit auch das Integral

$$\int_{\mathfrak{K}_\varepsilon} \left| e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b\right| |dt|.$$

Außerdem gelten für die Integrale $\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-}$ und $\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+}$ die Abschätzungen:

$$\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b\right| |dt| = \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| e^{tx+a\log\left|\frac{1}{2}+t\right| \mp ia\pi + b\log\left|\frac{1}{2}-t\right|}\right| |dt|$$

$$\leqq e^{\pi\frac{Q}{2n}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} e^{t\Re x} \left|\frac{1}{2}+t\right|^{\Re a} \left|\frac{1}{2}-t\right|^{\Re b} |dt| \leqq e^{\pi\frac{Q}{2n}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left|\frac{1}{2}+t\right|^{\Re a} \left|\frac{1}{2}-t\right|^{\Re b} |dt|$$

$$= e^{\pi\frac{Q}{2n}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left|\frac{1}{2}+t\right|^{-1-\frac{1}{n}} \left|\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{2}+t}\right|^{\Re b} |dt| \leqq e^{\pi\frac{Q}{2n}} \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{Q-1}{2n}-\frac{1}{2}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left|\frac{1}{2}+t\right|^{-1-\frac{1}{n}} |dt|.$$

Daher ist sowohl

$$\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} \left| e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b\right| |dt|$$

als auch

$$\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+} \left| e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b\right| |dt|$$

für $|x-\xi| \leqq \xi$ und $|c| \leqq Q$ beschränkt. Man hat also

$$|I_{n,\nu}| \leqq H.$$

wo H, falls $|x-\xi| \leqq \xi$ und $|c| \leqq Q$ ist, eine von ν, x und c unabhängige Schranke ist. Da man aber ξ und Q beliebig groß wählen kann, so findet nach dem Vitalischen Satze die Konvergenz von $I_{n,\nu}$ gegen I_n auf jedem endlichen Bereich der rechten x-Halbebene $\Re x>0$ und auf jedem endlichen Bereich der c-Ebene gleichmäßig in x und c statt. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz ist daher I_n bei festem c eine für $\Re x > 0$ regulär analytische Funktion von x und bei festem x mit positivem Realteil $(\Re x > 0)$ eine für alle c regulär analytische Funktion von c. Der Weierstraßsche Doppelreihensatz liefert weiterhin für $\Re x > 0$ die Folgerungen:

$$\frac{dI_n}{dx} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{dI_{n,\nu}}{dx}, \qquad \frac{d^2I_n}{dx^2} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{d^2I_{n,\nu}}{dx^2}.$$

Hieraus ergibt sich, da man ja die eigentlichen Integrale $I_{n,\nu}$ unter dem Integralzeichen nach x differenzieren darf, daß man, wie behauptet, auch das uneigentliche Integral I_n unter dem Integralzeichen nach x differenzieren darf. Wir fassen unsere Ergebnisse in folgenden Satz zusammen:

Das Integral

$$I_n(x, c) = \int_{\mathfrak{C}_\varepsilon} e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b dt \tag{28}$$

stellt bei beliebigem c für $\Re x > 0$ *eine Lösung der Gleichung* (24) *dar und ist bei festem c eine für* $\Re x > 0$ *regulär analytische Funktion von x, bei festem x mit positivem Realteil* ($\Re x > 0$) *eine für alle c regulär analytische Funktion von c.*

Wir bemerken noch, daß das Integral $I_n(x, c)$, falls nur $0 < \varepsilon < 1$ ist, von ε unabhängig ist. Dies ergibt sich unmittelbar daraus, daß nach dem Cauchyschen Integralsatz das Integral

$$\int e^{tx}\left(\frac{1}{2}+t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b dt$$

verschwindet, wenn es über den in Fig. 2 dargestellten geschlossenen Integrationsweg erstreckt wird.

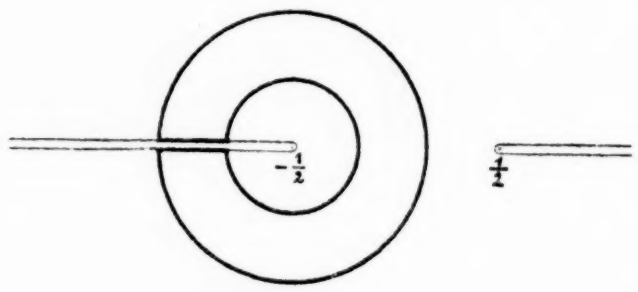


Fig. 2.

Außer dem Integral I_n brauchen wir noch das für $\Re x > 0$, $\Re c > -n+1$ existierende Integral

$$I_n^*(x, c) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} e^{x}\left(-\frac{1}{2}-t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b dt, \tag{29}$$

welches längs der negativ reellen Achse zu erstrecken ist und wo unter

$$\left(-\frac{1}{2}-t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b$$

der Wert

$$e^{a\log|-\frac{1}{2}-t|+b\log|\frac{1}{2}-t|}$$

mit reellem $\log\left|-\frac{1}{2}-t\right|$ und reellem $\log\left|\frac{1}{2}-t\right|$ zu verstehen ist. Man gelangt auf demselben Wege wie oben bei I_n zu folgendem Ergebnis:

Das Integral

$$I_n^*(x, c) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{tx}\left(-\frac{1}{2}-t\right)^a\left(\frac{1}{2}-t\right)^b dt \tag{29}$$

stellt für $\Re x > 0$, $\Re c > -n+1$ *eine Lösung der Gleichung* (24) *dar und ist bei festem c mit* $\Re c > -n+1$ *eine für* $\Re x > 0$ *regulär analytische Funktion von x, bei festem x mit* $\Re x > 0$ *eine für* $\Re c > -n+1$ *regulär analytische Funktion von c.*

Für später sei noch angemerkt, daß man auch das Integral I_n^* unter dem Integralzeichen nach x differenzieren darf.

Wir kehren nunmehr vermittels (23) zur unabhängigen Veränderlichen z zurück. Dabei geht die rechte Halbebene $\Re x > 0$ in einen der Winkelräume

$$\left|\arg z - \frac{m\pi}{n}\right| < \frac{\pi}{2n} \qquad (m = 0, 2, \ldots, 2n-2)$$

über, und zwar wollen wir der Einfachheit halber stets den Winkelraum $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ wählen. Dann erhalten wir folgende Ergebnisse:

Das Integral

$$J_n(z, c) = \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt \tag{30}$$

stellt für $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ *bei beliebigem* c *eine Lösung der Gleichung* (18) *dar und ist bei festem* c *eine für* $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ *regulär analytische Funktion von* z, *bei festem* z *mit* $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ *eine für alle* c *regulär analytische Funktion von* c.

Das Integral

$$J_n^*(z, c) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left(-\frac{1}{2} - t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt \tag{31}$$

stellt für $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$, $\Re c > -n + 1$ *eine Lösung der Gleichung* (18) *dar und ist bei festem* c *mit* $\Re c > -n + 1$ *eine für* $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ *regulär analytische Funktion von* z, *bei festem* z *mit* $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ *eine für* $\Re c > -n + 1$ *regulär analytische Funktion von* c [6]).

§ 5. *Zusammenhänge zwischen den Integralen* J_n, J_n^* *und den Potenzreihen* g_n^*, g_n^{**}.

Zunächst wollen wir untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen den Integralen $J_n(z, c)$ und $J_n^*(z, c)$ besteht. Dabei haben wir $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$, $\Re c > -n + 1$ vorauszusetzen.

Nun strebt aber unter diesen Voraussetzungen

$$\int_{\mathfrak{R}_\varepsilon} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0,$$

---

[6]) Die Werte, die das Integral (30) bzw. (31) in dem Winkelraum $\left|\arg z - \frac{m'\pi}{n}\right| < \frac{\pi}{2n}$ $(m' = 0, 2, \ldots, 2n-2)$ liefert, sind im allgemeinen keineswegs analytische Fortsetzungen der Werte, die es in dem Winkelraum

$$\left|\arg z - \frac{m''\pi}{n}\right| < \frac{\pi}{2n} \qquad (m'' = 0, 2, \ldots, 2n-2)$$

liefert, falls $m' \neq m''$ ist. Wenn man also, wie es hier stets geschehen soll, unter $J_n(z, c)$ bzw. $J_n^*(z, c)$ eine bestimmte analytische Funktion von z verstehen will, so muß man in (30) bzw. (31) z auf einen bestimmten der Winkelräume $\left|\arg z - \frac{m\pi}{n}\right| < \frac{\pi}{2n}$ $(m = 0, 2, \ldots, 2n-2)$ beschränken, z. B. wie oben auf den Winkelraum $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$.

und somit ist

$$J_n(z,c) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} e^{\frac{2}{n}z^n t} \left(\frac{1}{2}+t\right)^a \left(\frac{1}{2}-t\right)^b dt + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+} e^{\frac{2}{n}z^n t} \left(\frac{1}{2}+t\right)^a \left(\frac{1}{2}-t\right)^b dt .$$

Da hierin

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} = e^{-i\pi a} J_n^*(z,c), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+} = -e^{i\pi a} J_n^*(z,c)$$

ist, so ergibt sich für $\Re c > -n+1$ folgender Zusammenhang:

$$J_n(z,c) = -2i \sin \pi a \, J_n^*(z,c). \tag{32}$$

Nunmehr können wir dazu übergehen, den Zusammenhang zwischen den Lösungen $J_n(z,c)$, $J_n^*(z,c)$ und $g_n^*(z,c)$, $g_n^{**}(z,c)$ der Gleichung (18) zu ermitteln. Wenn auch $J_n(z,c)$ und $J_n^*(z,c)$ durch (30) bzw. (31) nur in dem Winkelraum $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ dargestellt werden, so wissen wir doch, daß J_n und J_n^* (wie jede Lösung von (18)) bei festem c ganze Funktionen von z sind und sich in beständig konvergente Potenzreihen entwickeln lassen. Daher können wir ansetzen:

$$J_n(z,c) = \gamma_n^{(0)}(c) + \gamma_n^{(1)}(c)\, z + \cdots,$$
$$J_n^*(z,c) = \delta_n^{(0)}(c) + \delta_n^{(1)}(c)\, z + \cdots,$$

so daß wegen der Anfangsbedingungen von $g_n^*(z,c)$ und $g_n^{**}(z,c)$ folgender Zusammenhang zwischen J_n, J_n^* und g_n^*, g_n^{**} besteht:

$$\begin{cases} J_n(z,c) = \gamma_n^{(0)}(c)\, g_n^{**}(z,c) + \gamma_n^{(1)}(c)\, g_n^*(z,c), \\ J_n^*(z,c) = \delta_n^{(0)}(c)\, g_n^{**}(z,c) + \delta_n^{(1)}(c)\, g_n^*(z,c). \end{cases} \tag{33}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten $\gamma_n^{(0)}(c)$, $\gamma_n^{(1)}(c)$, $\delta_n^{(0)}(c)$, $\delta_n^{(1)}(c)$ haben wir nun zu bestimmen. Zunächst zeigen wir, daß $\gamma_n^{(0)}(c)$ und $\gamma_n^{(1)}(c)$ für alle c, $\delta_n^{(0)}(c)$ und $\delta_n^{(1)}(c)$ für $\Re c > -n+1$ regulär analytische Funktionen von c sind.

Es sei $c^{(0)}$ eine beliebige Stelle der c-Ebene. Da $w_n(z, c^{(0)})$ nicht konstant ist, gibt es zwei dem Winkelraum $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ angehörende Punkte z_1 und z_2 so, daß

$$\frac{g_n^*(z_1, c^{(0)})}{g_n^{**}(z_1, c^{(0)})} = w_n(z_1, c^{(0)}) \neq w_n(z_2, c^{(0)}) = \frac{g_n^*(z_2, c^{(0)})}{g_n^{**}(z_2, c^{(0)})}$$

ist. z_1 und z_2 seien so gewählt. Dann ist:

$$g_n^{**}(z_1, c^{(0)})\, g_n^*(z_2, c^{(0)}) - g_n^{**}(z_2, c^{(0)})\, g_n^*(z_1, c^{(0)}) \neq 0 . \tag{34}$$

Nach (33) hat man nun:

$$\gamma_n^{(0)}(c)\, g_n^{**}(z_1, c) + \gamma_n^{(1)}(c)\, g_n^*(z_1, c) = J_n(z_1, c),$$
$$\gamma_n^{(0)}(c)\, g_n^{**}(z_2, c) + \gamma_n^{(1)}(c)\, g_n^*(z_2, c) = J_n(z_2, c).$$

Hieraus folgt durch Auflösung:

$$\begin{cases} \gamma_n^{(0)}(c) = \dfrac{J_n(z_1, c)\, g_n^*(z_2, c) - J_n(z_2, c)\, g_n^*(z_1, c)}{g_n^{**}(z_1, c)\, g_n^*(z_2, c) - g_n^{**}(z_2, c)\, g_n^*(z_1, c)}, \\ \gamma_n^{(1)}(c) = \dfrac{g_n^{**}(z_1, c)\, J_n(z_2, c) - g_n^{**}(z_2, c)\, J_n(z_1, c)}{g_n^{**}(z_1, c)\, g_n^*(z_2, c) - g_n^{**}(z_2, c)\, g_n^*(z_1, c)}. \end{cases} \tag{35}$$

Wie früher (vgl. auch § 3) gezeigt wurde, sind

$$g_n^*(z_1, c),\ g_n^*(z_2, c),\ g_n^{**}(z_1, c),\ g_n^{**}(z_2, c),\ J_n(z_1, c),\ J_n(z_2, c)$$

ganze Funktionen von c. Daher sind in (35) Zähler und Nenner ganze Funktionen von c, und da nach (34) der Nenner an der Stelle $c^{(0)}$ nicht verschwindet, so schließt man hieraus, daß $\gamma_n^{(0)}(c)$ und $\gamma_n^{(1)}(c)$ in der Umgebung der Stelle $c^{(0)}$ regulär analytisch sind. Da aber $c^{(0)}$ ganz beliebig war, so sind in der Tat $\gamma_n^{(0)}(c)$ und $\gamma_n^{(1)}(c)$ für alle c regulär analytische Funktionen von c.

Ganz ebenso erkennt man, daß $\delta_n^{(0)}(c)$ und $\delta_n^{(1)}(c)$ für $\Re c > -n+1$ regulär analytische Funktionen von c sind.

Bevor wir uns zur expliziten Bestimmung der in (33) auftretenden Koeffizienten wenden, erinnern wir an das Eulersche Integral erster Gattung $\mathsf{B}(\varrho, \sigma)$ (die Betafunktion), an das Eulersche Integral zweiter Gattung $\Gamma(s)$ (die Gammafunktion) sowie an den Zusammenhang zwischen beiden:

$$\mathsf{B}(\varrho, \sigma) = \int_0^1 t^{\varrho-1}(1-t)^{\sigma-1}dt \qquad (\Re\varrho > 0,\ \Re\sigma > 0) \tag{36}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt \qquad (\Re s > 0) \tag{37}$$

$$\mathsf{B}(\varrho, \sigma) = \frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\varrho+\sigma)}\,. \tag{38}$$

Um nun zunächst $\delta_n^{(0)}(c)$ und $\delta_n^{(1)}(c)$ zu ermitteln, substituieren wir in dem Integral (31) $t = -\tau - \frac{1}{2}$. Dann geht die Darstellung (31) über in

$$J_n^*(z, c) = \int_0^\infty e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n}\,\tau^a(\tau+1)^b\,d\tau\,. \tag{39}$$

Wie in § 4 bemerkt wurde, darf man $I_n^*(x, c)$ in der Gestalt (29) unter dem Integralzeichen nach x differenzieren. Es ist leicht, auf Grund dieser Tatsache einzusehen, daß man auch das Integral J_n^* z. B. in der Gestalt (39) unter dem Integralzeichen nach z differenzieren darf, d. h. daß gilt:

$$\frac{dJ_n^*}{dz} = \int_0^\infty (-2\tau-1)z^{n-1}e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n}\,\tau^a(\tau+1)^b\,d\tau\,. \tag{40}$$

Diese Darstellungen (39) für J_n^* und (40) für $\frac{dJ_n^*}{dz}$ gelten für $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$, $\Re c > -n+1$, sind also nicht ohne weiteres bei $z = 0$ anwendbar. Da aber J_n^* und $\frac{dJ_n^*}{dz}$ ganze Funktionen von z sind, so kann deren Wert bei $z = 0$, der ja gleich $\delta_n^{(0)}(c)$ bzw. gleich $\delta_n^{(1)}(c)$ ist, durch den Zielwert bestimmt werden, dem das J_n^* darstellende Integral (39) bzw. das $\frac{dJ_n^*}{dz}$ darstellende Integral (40) zustrebt, wenn z längs der positiv reellen Achse gegen 0 rückt. Es sei nun bei der Bestimmung dieser Zielwerte nur aus Darstellungsgründen vorübergehend c reell (und $> -n+1$) vorausgesetzt. Dies bedeutet keine Einschränkung, denn die zu gewinnenden Ausdrücke für $\delta_n^{(0)}(c)$ und $\delta_n^{(1)}(c)$ gelten ohne weiteres auch für alle komplexen c der Halbebene $\Re c > -n+1$.

Es ist, falls z positiv reelle Werte durchläuft (vgl. (39)),

$$\delta_n^{(0)}(c) = \lim_{z\to 0} \int_0^\infty e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n}\, \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau$$

oder, wenn man das Integral in zwei Integrale zerlegt,

$$\delta_n^{(0)}(c) = \lim_{z\to 0} \int_0^{z^{-1}} + \lim_{z\to 0} \int_{z^{-1}}^\infty . \tag{41}$$

Für das erste Integral in (41) ergeben sich die Abschätzungen

$$e^{(-2z^{-1}-1)\frac{1}{n}z^n} \int_0^{z^{-1}} \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau < \int_0^{z^{-1}} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n}\, \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau < e^{-\frac{1}{n}z^n} \int_0^{z^{-1}} \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau .$$

Für $z \to 0$ strebt sowohl der links, als auch der rechts vor dem Integral stehende Exponentialfaktor gegen 1. Die obere Integrationsgrenze z^{-1} wächst über alle Grenzen, so daß das links und rechts auftretende Integral gegen $\int_0^\infty \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau$ strebt. Daher gilt in (41)

$$\lim_{z\to 0} \int_0^{z^{-1}} = \int_0^\infty \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau .$$

Für das zweite Integral in (41) erhält man die Abschätzung

$$\int_{z^{-1}}^\infty e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n}\, \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau < \int_{z^{-1}}^\infty \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau .$$

Folglich gilt in (41)

$$\lim_{z\to 0} \int_{z^{-1}}^\infty = 0 .$$

Somit ist

$$\delta_n^{(0)}(c) = \int_0^\infty \tau^a(\tau+1)^b\, d\tau ,$$

oder nach Ausführung der Transformation $\tau = \dfrac{1-y}{y}$:

$$\delta_n^{(0)}(c) = \int_0^1 y^{-2-a-b}\,(1-y)^a\, dy .$$

(36) und (38) ergeben schließlich

$$\delta_n^{(0)}(c) = \frac{\Gamma(-1-a-b)\,\Gamma(1+a)}{\Gamma(-b)}$$

oder, wenn man für a und b die Werte (27) einsetzt,

$$\delta_n^{(0)}(c) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+c}{2n}\right)} .$$

Wie aus (40) folgt, ist, falls z positiv reelle Werte durchläuft,

$$\delta_n^{(1)}(c) = \lim_{z\to 0} \int_0^\infty (-2\tau - 1) z^{n-1} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n} z^n} \tau^a (\tau+1)^b \, d\tau$$

oder

$$(42) \quad \begin{cases} \delta_n^{(1)}(c) = -2 \lim\limits_{z\to 0} z^{n-1} e^{-\frac{1}{n} z^n} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{2}{n} z^n \tau} \tau^{a+1} (\tau+1)^b \, d\tau \\ \qquad\qquad - \lim\limits_{z\to 0} z^{n-1} \int\limits_0^\infty e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n} z^n} \tau^a (\tau+1)^b \, d\tau . \end{cases}$$

Für $z \to 0$ strebt auch $z^{n-1} \to 0$ und da, wie oben gezeigt, das zweite Integral in (42) gegen den endlichen Grenzwert $\delta_n^{(0)}(c)$ strebt, so ist in (42) der zweite Limes gleich 0. Ferner strebt in dem ersten Limes von (42) der Faktor $e^{-\frac{1}{n} z^n}$ gegen 1. Daher reduziert sich $\delta_n^{(1)}(c)$ auf

$$\delta_n^{(1)}(c) = -2 \lim_{z\to 0} z^{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{n} z^n \tau} \tau^{a+1} (\tau+1)^b \, d\tau$$

oder, wenn man die Transformation $\frac{2}{n} z^n \tau = v$ ausführt und dabei beachtet, daß nach

(27) $a + b + 1 = -\frac{1}{n}$ ist,

$$(43) \quad \begin{cases} \delta_n^{(1)}(c) = -n \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \lim\limits_{z\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{2z^n}{nv}\right)^b dv \\ \qquad\qquad = -n \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\lim\limits_{z\to 0} \int\limits_0^z + \lim\limits_{z\to 0} \int\limits_z^\infty \right). \end{cases}$$

Aus der Abschätzung

$$\int_0^z e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{2z^n}{nv}\right)^b dv < \int_0^z e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv$$

ergibt sich, daß in (43)

$$\lim_{z\to 0} \int_0^z = 0$$

ist. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{2}{n} z^{n-1}\right)^b \int_z^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv < \int_z^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{2z^n}{nv}\right)^b dv < \int_z^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv .$$

Daher ist in (43)

$$\lim_{z\to 0} \int_z^\infty = \int_0^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv = \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

und somit

$$\delta_n^{(1)}(c) = -n \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

oder nach der bekannten Funktionalgleichung der Gammafunktion $\Gamma(1+s) = s\Gamma(s)$:

$$\delta_n^{(1)}(c) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right).$$

Wir haben also, um es noch einmal zusammenzustellen, zunächst unter der Voraussetzung, daß c reell (und $> -n+1$) ist, folgende Werte gefunden:

$$(44) \qquad \begin{cases} \delta_n^{(0)}(c) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}, \\ \delta_n^{(1)}(c) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Aber diese Ausdrücke gelten, da $\delta_n^{(0)}(c)$ und $\delta_n^{(1)}(c)$ in der ganzen Halbebene $\Re c > -n+1$ regulär analytisch sind, ohne weiteres auch für alle komplexen c dieser Halbebene.

Zur expliziten Bestimmung von $\gamma_n^{(0)}(c)$ und $\gamma_n^{(1)}(c)$ stützen wir uns nunmehr auf den für $\Re c > -n+1$ gültigen Zusammenhang (32). Dieser liefert die Beziehungen:

$$\gamma_n^{(0)}(c) = -2i\,\delta_n^{(0)}(c)\sin \pi a,$$
$$\gamma_n^{(1)}(c) = -2i\,\delta_n^{(1)}(c)\sin \pi a.$$

Daher ergibt sich zunächst für $\Re c > -n+1$:

$$(45) \qquad \begin{cases} \gamma_n^{(0)}(c) = 2i\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)} \sin \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right) \\ \qquad = 2\pi i \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}, \\ \gamma_n^{(1)}(c) = 2i\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right) \sin \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right) \\ \qquad = 2\pi i \dfrac{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}. \end{cases}$$

Da aber, wie oben gezeigt wurde, $\gamma_n^{(0)}(c)$ und $\gamma_n^{(1)}(c)$ in der ganzen c-Ebene regulär analytisch sind, so gelten die Ausdrücke (45) ohne weiteres überhaupt für alle c.

Es sei noch erwähnt, daß nach (45) $\gamma_n^{(0)}(c)$ die Nullstellen $c = \pm((2j+1)n+1)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, $\gamma_n^{(1)}(c)$ die Nullstellen $c = (2j+1)n+1$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ besitzt. Daher verschwindet $J_n(z, c)$ für $c = (2j+1)n+1$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ und nur für diese c identisch in z. Dagegen verschwindet $J_n^*(z, c)$, wie aus (44) folgt, für keinen einzigen Wert von c identisch in z.

§ 6. *Die Zielwerte von $w_n(z, c)$ und die Stellen, über denen die logarithmischen Windungspunkte liegen.*

Als nächsten Schritt führen wir den Nachweis, daß die Integrale $I_n(x, c)$ und $I_n^*(x, c)$ gegen den Zielwert 0 streben, falls x in dem Winkelraum

$$|\arg x| \leqq \frac{\pi}{2} - \eta \qquad (\eta > 0, \text{ aber beliebig klein})$$

über alle Grenzen wächst.

Es ist (vgl. (28))

$$|I_n| \leqq \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} e^{\Re t \cdot \Re x - \Im t \cdot \Im x} \left| \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b \right| |dt| ,$$

und da auf $\mathfrak{S}_\varepsilon$

$$\Re t \leqq -\frac{1}{2} + \varepsilon, \quad |\Im t| \leqq \varepsilon$$

ist, so folgt

$$|I_n| \leqq e^{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\Re x + \varepsilon |\Im x|} \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \left| \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b \right| |dt| .$$

Es sei $\varepsilon \leqq \frac{1}{4}$ und $|\Im x| \leqq \frac{1}{8\varepsilon} \Re x$. Dann ist

$$\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \Re x + \varepsilon |\Im x| \leqq -\frac{1}{8} \Re x ,$$

so daß die Abschätzung

$$|I_n| \leqq e^{-\frac{1}{8}\Re x} \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \left| \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b \right| |dt|$$

gilt. Wenn daher x in dem Winkelraum $|\Im x| \leqq \frac{1}{8\varepsilon} \Re x$ über alle Grenzen wächst, so strebt I_n gegen den Zielwert 0. Da man ε beliebig klein wählen kann, so ist hiermit für I_n die Behauptung bewiesen.

Für I_n^* ergibt sich die Behauptung aus der aus (29) folgenden Abschätzung

$$|I_n^*| \leqq e^{-\frac{1}{2}\Re x} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \left| \left(-\frac{1}{2} - t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b \right| |dt| .$$

Die bewiesenen Zielwerteigenschaften von I_n und I_n^* lassen sich sofort auf J_n und J_n^* übertragen:

Die Integrale $J_n(z, c)$ und $J_n^*(z, c)$ streben gegen den Zielwert 0, *falls z in dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ ($\vartheta > 0$, aber beliebig klein) über alle Grenzen wächst.*

Hiernach sind J_n (für $c \neq (2j+1)n + 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$) und J_n^* (für $\Re c > -n + 1$), wie Herr R. Nevanlinna sie nennt, *defekte Lösungen* der Gleichung (18).

Nach einem ganz allgemein von Herrn R. Nevanlinna bewiesenen Satz [7]) strebt nun jede von der defekten Lösung J_n bzw. J_n^* linear unabhängige Lösung von (18) in

---

[7]) R. Nevanlinna, a. a. O. [1]), S. 352.

dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ gegen den Zielwert ∞. Insbesondere gilt dies also, falls $c \neq (2j+1)n+1$ $(j = -1, -2, -3, \ldots)$ ist, für die Lösung g_n^{**}.

Nun läßt sich, falls $c \neq (2j+1)n+1$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist, die erste der Gleichungen (33) folgendermaßen schreiben:

$$w_n(z, c) = \frac{g_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} = \frac{1}{\gamma_n^{(1)}(c)} \frac{J_n(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} - \frac{\gamma_n^{(0)}(c)}{\gamma_n^{(1)}(c)}.$$

Da der Quotient $\frac{J_n(z, c)}{g_n^{**}(z, c)}$ in dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ gegen den Zielwert 0 strebt, so schließt man hieraus:

Wenn z in dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ über alle Grenzen wächst, so strebt $w_n(z, c)$ gegen den Zielwert

$$-\frac{\gamma_n^{(0)}(c)}{\gamma_n^{(1)}(c)} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)},$$

vorläufig allerdings noch unter der Einschränkung, daß

$$c \neq (2j+1)n+1 \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ist.

Im Falle $c = (2j+1)n+1$ $(j = -1, -2, \ldots)$ ist $J_n(z, c) = \gamma_n^{(0)}(c) g_n^{**}(z, c)$ mit nichtverschwindendem $\gamma_n^{(0)}(c)$. Dann strebt also, wenn z in dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ über alle Grenzen wächst, $g_n^{**}(z, c)$ gegen den Zielwert 0, $g_n^*(z, c)$ gegen den Zielwert ∞ und $w_n(z, c) = \frac{g_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)}$ gegen den Zielwert ∞. Nun hat aber der Ausdruck

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)}$$

bei $c = (2j+1)n+1$ $(j = -1, -2, \ldots)$ je einen Pol erster Ordnung. Daher ordnet sich auch der Fall $c = (2j+1)n+1$ $(j = -1, -2, \ldots)$ der im vorigen Abschnitt angegebenen Formulierung unter, die dort u. a. gemachte Einschränkung $c \neq (2j+1)n+1$ $(j = -1, -2, \ldots)$ kann fallen gelassen werden.

Nun bleibt nur noch der Fall $c = (2j+1)n+1$ $(j = 0, 1, \ldots)$ zu erledigen. Da in diesem Falle das Integral $J_n(z, c)$ identisch in z verschwindet, stützen wir uns jetzt auf das nicht identisch in z verschwindende Integral $J_n^*(z, c)$. Wir schreiben die zweite der Gleichungen (33) in folgender Form:

$$w_n(z, c) = \frac{g_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} = \frac{1}{\delta_n^{(1)}(c)} \frac{J_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} - \frac{\delta_n^{(0)}(c)}{\delta_n^{(1)}(c)}.$$

Da $\frac{J_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)}$ in dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ dem Zielwert 0 zustrebt, so er-

gibt sich die Folgerung, daß $w_n(z, c)$ in diesem Winkelraum dem Zielwert

$$-\frac{\delta_n^{(0)}(c)}{\delta_n^{(1)}(c)} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)}$$

zustrebt. Man kann also im vorletzten Abschnitt auch die Einschränkung $c \neq (2j+1)n+1$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ fallen lassen.

Hiermit ist ohne Einschränkung für alle reellen und komplexen c folgender Satz vollständig bewiesen:

Wenn z in dem Winkelraum $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ *über alle Grenzen wächst, so strebt $w_n(z, c)$ gegen den Zielwert*

$$A_0 = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)}.$$

Nunmehr liefert die Anwendung der Gleichung (19) den weiteren Satz:

Wenn z in dem Winkelraum $\left|\arg z - \frac{\pi}{n}\right| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ *über alle Grenzen wächst, so strebt $w_n(z, c)$ gegen den Zielwert*

$$A_1 = e^{\frac{i\pi}{n}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-c}{2n}\right)}.$$

Schließlich erhält man, indem man die Gleichung (20) mehrmals auf die beiden letzten Sätze anwendet, das allgemeine Ergebnis:

Wenn z in dem Winkelraum $\left|\arg z - \frac{m\pi}{n}\right| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ $(\vartheta > 0$, *aber beliebig klein) über alle Grenzen wächst, so strebt bei beliebigem reellem oder komplexem c die Grundlösung $w_n(z, c)$ der Gleichung*

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2},$$

falls m eine gerade Zahl ist $(m = 0, 2, \ldots, 2n-2)$, *gegen den Zielwert*

$$A_m = e^{\frac{im\pi}{n}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)},$$

falls m eine ungerade Zahl ist $(m = 1, 3, \ldots, 2n-1)$, *gegen den Zielwert*

$$A_m = e^{\frac{im\pi}{n}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-c}{2n}\right)}.$$

Mit anderen Worten: Jeder Weg, der in einem der Winkelräume

$$\left|\arg z - \frac{m\pi}{n}\right| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1;\ \vartheta > 0)$$

nach ∞ einmündet, ist für die meromorphe Funktion $w_n(z, c)$ Zielweg mit dem Zielwert A_m.

Hieraus folgert man nun weiterhin mit Hilfe des Satzes von Hurwitz-Iversen und unter Beachtung der Tatsache, daß $w_n(z, c)$ als Funktion von z keine mehrfachen Stellen besitzt, den Satz:

Die Grundlösung $w_n(z, c)$ der Gleichung

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$$

bildet die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche ab, die nur logarithmische Windungspunkte, und zwar genau $2n$ solche besitzt. Diese liegen über den Stellen

$$w = A_m = e^{\frac{im\pi}{n}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)} \qquad (m \text{ gerade})$$

und

$$w = A_m = e^{\frac{im\pi}{n}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-c}{2n}\right)} \qquad (m \text{ ungerade}).$$

§ 7. *Die gegenseitige Lage der logarithmischen Windungspunkte in Abhängigkeit von c.*

Der letzte Satz des vorigen Paragraphen besagt in geometrischer Ausdrucksweise folgendes:

Die $2n$ logarithmischen Windungspunkte liegen zur Hälfte über der Kreislinie

$$|w| = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+c}{2n}\right)}\right|$$

und zur Hälfte über der Kreislinie

$$|w| = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-c}{2n}\right)}\right|,$$

und zwar sind sowohl die über der ersten, als auch die über der zweiten Kreislinie gelegenen Windungspunkte die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks [8]).

Wir wollen zunächst folgende, im Anschluß hieran auftauchende Frage untersuchen: Für welche Werte von c fallen die beiden Kreislinien, über die die Windungs-

[8]) Im Falle $n = 2$ sind hierbei unter den Ecken eines „regelmäßigen 2-Ecks" zwei diametral gegenüberliegende Punkte der in Frage kommenden Kreislinie zu verstehen.

punkte verteilt sind, zusammen? Wann kommen also sämtliche $2n$ Windungspunkte über eine und dieselbe Kreislinie zu liegen?

Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Funktion

$$\Phi_n(c) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1+c}{2n}\right)} \tag{46}$$

den Betrag 1 annimmt. Auf Grund der Funktionalgleichung $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ läßt sich nun diese Funktion $\Phi_n(c)$ durch die Exponentialfunktion darstellen. Man erhält:

$$\Phi_n(c) = \frac{\sin \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}{\sin \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)} = \frac{e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{i\pi c}{n}} + 1}{e^{\frac{i\pi c}{n}} + e^{\frac{i\pi}{n}}}. \tag{47}$$

Wir haben also zu untersuchen, für welche Werte von c die Funktion (47) den Betrag 1 annimmt. $|\Phi_n(c)| = 1$ ist aber gleichbedeutend mit

$$\left|\frac{\left(\Re(e^{\frac{i\pi c}{n}}) + \cos\frac{\pi}{n}\right) + i\left(\Im(e^{\frac{i\pi c}{n}}) - \sin\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\Re(e^{\frac{i\pi c}{n}}) + \cos\frac{\pi}{n}\right) + i\left(\Im(e^{\frac{i\pi c}{n}}) + \sin\frac{\pi}{n}\right)}\right| = 1.$$

Man sieht hieraus, daß, da ja $\sin\frac{\pi}{n} \neq 0$ ist, dann und nur dann $|\Phi_n(c)| = 1$ ist, wenn

$$\Im(e^{\frac{i\pi c}{n}}) = e^{-\frac{\pi \Im c}{n}} \sin\frac{\pi \Re c}{n} = 0$$

ist. Man erhält daher die Bedingung

$$\Re c = jn \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Somit haben wir den Satz:

Dann und nur dann, wenn $\Re c = jn$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *ist, deckt sich die Kreislinie, über der die Windungspunkte* $A_0, A_2, \ldots, A_{2n-2}$ *liegen, mit der Kreislinie, über der die Windungspunkte* $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$ *liegen.*

Von besonderem Interesse ist weiterhin noch die Frage: Für welche Werte von c kommen die Windungspunkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ nicht über lauter verschiedene Stellen zu liegen? Mit anderen Worten: Wann fallen die $2n$ Windungspunkte teilweise übereinander?

Zunächst untersuchen wir die Möglichkeit, daß das von den Windungspunkten $A_0, A_2, \ldots, A_{2n-2}$ gebildete n-Eck mit dem von den Windungspunkten $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$ gebildeten n-Eck zusammenfällt, daß also die Windungspunkte paarweise übereinander fallen. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Funktion $\Phi_n(c)$ (vgl. (46)) einen der Werte $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ $(k = 1, 3, \ldots, 2n-1)$ annimmt. Die Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2n-1$ scheiden jedoch von vornherein aus, da, wie aus der Darstellung (47) ersichtlich ist, die Funktion $\Phi_n(c)$ die Werte $e^{\frac{i\pi}{n}}$ und $e^{\frac{i(2n-1)\pi}{n}}$ als Picardsche Ausnahme-

werte (im engeren Sinne) besitzt. Daher tritt der Fall des paarweisen Übereinanderfallens der Windungspunkte erst von $n = 3$ an ein.

Wir haben nun im Falle $n \geqq 3$ die Gleichung

$$\Phi_n(c) = e^{\frac{ik\pi}{n}} \qquad (k = 3, 5, \ldots, 2n-3)$$

nach c aufzulösen. Dies ergibt (vgl. (47))

$$e^{\frac{i\pi c}{n}} = -\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(k-1)\pi}{2n}}.$$

Man erhält also, da dieser Sinusquotient für $k = 3, 5, \ldots, 2n-3$ positiv ist, für c die Werte:

$$c = (2j+1)n + \frac{n}{i\pi}\log\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(k-1)\pi}{2n}}. \tag{48}$$

Hier ist unter dem Logarithmus des Sinusquotienten der reelle Wert zu verstehen, und j kann jede ganze Zahl bedeuten.

Somit kommen die Windungspunkte dann und nur dann paarweise übereinander zu liegen, wenn c gleich einem der Werte (48) ist. Es sei noch bemerkt, daß im Falle eines ungeraden n die Werte (48) für $k = n$ reell sind, nämlich gleich $(2j+1)n$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, daß dagegen im Falle eines geraden n kein einziger der Werte (48) reell ist.

Aus der bekannten Tatsache, daß die Funktion $\Gamma(s)$ keine Nullstelle, aber bei $s = 0, -1, -2, \ldots$ je einen Pol besitzt, folgert man unmittelbar noch einige weitere Möglichkeiten des Übereinanderfallens von Windungspunkten. Man kann dann folgenden abschließenden Satz aufstellen:

Die $2n$ logarithmischen Windungspunkte fallen

I. *über $2n$ verschiedene Grundpunkte, wenn c von den unter* II *und* III *anzuführenden Werten verschieden ist,*

II. *über n verschiedene Grundpunkte, wenn c einen der folgenden Werte hat:*

$$c = (2j+1)n + \frac{n}{i\pi}\log\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(k-1)\pi}{2n}} \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ k = 3, 5, \ldots, 2n-3),$$

III. *über $n+1$ verschiedene Grundpunkte, wenn c einen der folgenden Werte hat:*

1) $c = -((2j+1)n - 1)$ $\quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$
2) $c = -((2j+1)n + 1)$ $\quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$
3) $c = (2j+1)n - 1$ $\quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$
4) $c = (2j+1)n + 1$ $\quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$.

In dem nur bei $n \geqq 3$ vorkommenden Falle II *kommen die Windungspunkte paarweise übereinander zu liegen, und zwar A_k über A_0, A_{k+2} über A_2, usw. A_{k-2} über A_{2n-2}. In dem bei jedem $n(\geqq 2)$ vorkommenden Falle* III *kommen von den $2n$ Windungspunkten*

n über einen und denselben Grundpunkt zu liegen, und zwar im Unterfall

1) $A_0, A_2, \ldots, A_{2n-2}$ *über* $w = \infty$,
2) $A_0, A_2, \ldots, A_{2n-2}$ *über* $w = 0$,
3) $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$ *über* $w = \infty$,
4) $A_1, A_3, \ldots, A_{2n-1}$ *über* $w = 0$.

Teil 3. Die Struktur der Riemannschen Fläche.

§ 8. *Allgemeines über die Struktur einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten.*

Um die Struktur einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten zu beschreiben und zu veranschaulichen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Man ziehe in der w-Ebene eine geschlossene Jordankurve $\mathfrak{L}$, welche durch die Grundpunkte $a_1, a_2, \ldots, a_q$, über denen die Windungspunkte liegen, hindurchgeht und bei positivem Umlauf diese Grundpunkte in der angegebenen Reihenfolge trifft. $\mathfrak{L}$ wird durch die Grundpunkte in q Teilbogen zerlegt und zerlegt selbst die w-Ebene in ein Innengebiet $\mathfrak{G}_i$ (welches bei positivem Umlauf von $\mathfrak{L}$ zur Linken liegt) und in ein Außengebiet $\mathfrak{G}_a$. Denken wir uns nun die Riemannsche Fläche längs der Kurve $\mathfrak{L}$ durchstanzt, so zerfällt sie in unendlich viele über $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_a$ gelegene schlichte Flächenstücke, welche wir als (die zur Zerschneidung $\mathfrak{L}$ gehörigen) *Halbblätter* der Riemannschen Fläche bezeichnen wollen. Für jedes solche Halbblatt erscheinen gewisse der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_q$ als Windungspunkte. Diese Punkte, deren Anzahl mindestens 2, höchstens q beträgt, mögen die *Ecken*, die zwischen den Ecken gelegenen Teilstücke von $\mathfrak{L}$ die *Seiten* des betreffenden Halbblattes heißen. Die Struktur der Riemannschen Fläche wird nun offenbar dadurch vollständig beschrieben, daß man zu jedem Halbblatt angibt, an welche anderen Halbblätter es über den einzelnen Teilbogen von $\mathfrak{L}$ angeheftet ist.

Um diese Verhältnisse besser überschauen zu können, gehen wir in die z-Ebene über. Vermöge der eineindeutigen Beziehung, die die meromorphe Funktion $w(z)$ zwischen der schlichten endlichen z-Ebene und der über der w-Ebene gelegenen Riemannschen Fläche vermittelt, erscheinen in der z-Ebene als Urbilder der einzelnen Halbblätter der Riemannschen Fläche gewisse Gebiete, die wir *Halbgebiete* nennen wollen. Als Urbild einer Seite eines Halbblattes erscheint in der z-Ebene eine *Seite* des entsprechenden Halbgebietes, eine Kurve $\mathfrak{C}$, die aus dem Unendlichen kommt und ins Unendliche geht. Einem Halbblatt mit r Ecken ($2 \leqq r \leqq q$) entspricht somit ein Halbgebiet, welches mit r Lappen ins Unendliche reicht. Da diese Lappen den Umgebungen der Ecken des Halbblattes entsprechen, so seien die zu den einzelnen Lappen gehörigen unendlich fernen Randpunkte als die *Ecken* des betreffenden Halbgebietes bezeichnet. Über die Kurven $\mathfrak{C}$, die zusammen die Urbilder der Kurve $\mathfrak{L}$ sind, schließt man aus der Tatsache, daß $w(z)$ keine mehrfachen Stellen besitzt, noch folgendes: Je zwei verschiedene der Kurven $\mathfrak{C}$ haben im Endlichen keinen Punkt gemeinsam.

Wie Herr R. Nevanlinna gezeigt hat[9]), gibt es nun einerseits nur endlich viele Halbgebiete mit mehr als zwei Ecken, andererseits im Falle $q > 2$ aber auch mindestens ein solches Halbgebiet. Es gibt also ein wohlbestimmtes kleinstes aus Halbgebieten zusammengesetztes Gebiet, welches alle Halbgebiete mit mehr als zwei Ecken enthält. Dieses Gebiet, welches Herr R. Nevanlinna das *Kernpolygon* nennt, wird von p der

---

[9]) R. Nevanlinna, a. a. O. [1]), S. 303—321.

Kurven $\mathfrak{C}$, seinen Seiten, begrenzt, wobei p die Gesamtzahl der logarithmischen Windungspunkte bedeutet. Es ragt also mit p Lappen ins Unendliche, und jeder dieser Lappen bestimmt eine Ecke des Kernpolygons. Die Ecken des Kernpolygons sind eineindeutig den logarithmischen Windungspunkten der Riemannschen Fläche zugeordnet. Dem Kernpolygon entspricht nämlich in der Riemannschen Fläche ein aus endlich vielen Halbblättern zusammengesetztes Flächenstück, welches in sämtliche p Windungspunkte einmündet, und zwar das kleinste derartige Flächenstück. Außerhalb des Kernpolygons gibt es nur Halbgebiete mit zwei Ecken — solche Halbgebiete seien auch als *Streifengebiete* bezeichnet — und zwar schließt sich an jede der p Seiten des Kernpolygons eine unendliche Folge von nebeneinander liegenden Streifengebieten an. Eine solche Folge von Streifengebieten bezeichnet man auch als *logarithmisches Ende*. Ihm entspricht in der Riemannschen Fläche ein Flächenstück, welches sich in der einen Richtung unendlich oft um zwei Punkte herumwindet.

Das aus dem Kernpolygon und p logarithmischen Enden bestehende Netz der Halbgebiete gibt eine vollständige Übersicht über den Aufbau der Riemannschen Fläche. Im Anschluß an Herrn Elfving [10]) sei aber nunmehr noch eine andere Darstellungsweise für die Flächenstruktur angegeben, nämlich der *Streckenkomplex* [11]), wie wir ihn nennen wollen, der zu dem Netz der Halbgebiete in gewisser Weise dual ist.

Wir wählen zu diesem Zweck in $\mathfrak{G}_i$ einen Punkt w_i, in $\mathfrak{G}_a$ einen Punkt w_a und verbinden w_i mit w_a durch q punktfremde Kurven $\mathfrak{l}$ und zwar über jeden der q Teilbogen von $\mathfrak{L}$ genau einmal. Die Punkte w_i und w_a, sowie die Kurven $\mathfrak{l}$ denken wir uns auf die Riemannsche Fläche projiziert und betrachten die hierzu in der z-Ebene als Urbild erscheinende Konfiguration. Man bezeichnet die Urpunkte von w_i als *Innenknoten*, die Urpunkte von w_a als *Außenknoten*. Zwei Knoten heißen *benachbart*, wenn sie in benachbarten, d. h. unmittelbar aneinander grenzenden Halbgebieten liegen. (Von je zwei benachbarten Knoten ist also stets der eine ein Innenknoten, der andere ein Außenknoten.) Jede Kurve $\mathfrak{c}$, die als Urbild einer Kurve $\mathfrak{l}$ in der z-Ebene auftritt und zwei benachbarte Knoten unmittelbar verbindet, heißt ein *Glied*. Die Gesamtheit der Glieder, die zwei benachbarte Knoten verbinden (dies sind mindestens 1, höchstens $q-1$ Glieder), bildet ein *Bündel*. Mit dieser Ausdrucksweise können wir nun sagen, daß von jedem Knoten q Glieder ausgehen und daß diese q Glieder r Bündeln ($2 \leqq r \leqq q$) angehören, wobei r gleich ist der Anzahl der Ecken, die das dem Knoten entsprechende Halbblatt der Riemannschen Fläche besitzt.

Der Komplex der Gliedkurven $\mathfrak{c}$ gibt ebenso wie das Netz der Halbgebiete eine vollständige Übersicht über den Aufbau der Riemannschen Fläche. Da es nur auf topologische Zusammenhangsverhältnisse ankommt, kann man diesen Komplex noch schematisieren, indem man jedes Glied durch eine Strecke darstellt, und zwar die Glieder eines Bündels durch dicht nebeneinander liegende parallele Strecken. Die so erhaltene schematische Figur ist eben der *Streckenkomplex der Riemannschen Fläche*. Er besteht aus dem nur endlich viele Knoten und Glieder enthaltenden *Kern* und p *logarithmischen Enden*, entsprechend dem Kernpolygon und den p logarithmischen Enden bei der Darstellung der Flächenstruktur durch das Netz der Halbgebiete. Versteht man unter einem einfachen Knoten einen Knoten, von dem zwei Bündel ausgehen, und unter einem Verzweigungsknoten einen Knoten, von dem mehr als zwei Bündel ausgehen, so kann

---

[10]) Elfving, Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung, Acta Soc. Sci. Fennicae, Nova series A, **2** (1934), Nr. 3.

[11]) Wir vermeiden hier den von Herrn Elfving gebrauchten Ausdruck *topologischer Baum* und verwenden statt dessen die Bezeichnung *Streckenkomplex*, weil darin auch geschlossene Gliederzyklen vorkommen können.

man den Kern kennzeichnen als den kleinsten, alle Verzweigungsknoten (sowie alle möglicherweise noch zwischen diesen gelegenen einfachen Knoten) enthaltenden Teilkomplex des Streckenkomplexes. Jedes der p logarithmischen Enden besteht aus einer unendlichen Folge von einfachen Knoten, die durch Bündel von abwechselnd s und $q-s$ Gliedern $(1 \leqq s \leqq q-1)$ verbunden sind.

Die Bedeutung des Streckenkomplexes ist, um es noch einmal kurz zusammenzufassen, folgende: Die Knoten sind eineindeutig den Halbblättern der Riemannschen Fläche zugeordnet, während die Glieder angeben, in welcher Art und Weise die einzelnen Halbblätter zusammenhängen.

§ 9. *Die Struktur der Riemannschen Fläche in dem Falle, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte über lauter verschiedene Grundpunkte zu liegen kommen.*

Durch die allgemeinen Nevanlinnaschen Ergebnisse ist die Struktur einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten schon weitgehend aufgeklärt. Es bleibt nur noch die eine Frage offen: Wie ist das Kernpolygon aus Halbgebieten zusammengesetzt? Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Wie sieht der Kern des Streckenkomplexes aus?

Diese Frage wollen wir nun an unserer speziellen Flächenklasse untersuchen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte über $2n$ verschiedene Grundpunkte zu liegen kommen (Fall I des Satzes von Seite 28f.). Die Windungspunkte bezeichnen wir nun wieder wie in Teil 2, aber im Gegensatz zum vorigen Paragraphen, mit $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$. Die Numerierung der Windungspunkte ist also nicht mehr wie in § 8 willkürlich, sondern mit m $(= 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$ ist derjenige Windungspunkt A_m numeriert, der dem von $w(z)$ in dem Winkelraum $\left|\arg z - \frac{m\pi}{n}\right| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$ $(\vartheta > 0)$ angestrebten Zielwert entspricht. Die hierdurch festgelegte Reihenfolge $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ bezeichnen wir auch als die *natürliche* Reihenfolge der Windungspunkte. Nunmehr folgen die den Windungspunkten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ zugeordneten Ecken $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{2n-1}$ des Kernpolygons bei einem positiven Umlauf um das Kernpolygon gerade in dieser Reihenfolge aufeinander, und die $2n$ logarithmischen Enden $L_{01}, L_{12}, L_{23}, \ldots, L_{2n-1,0}$ winden sich der Reihe nach um die Windungspunkte A_0 und A_1, A_1 und A_2, A_2 und $A_3, \ldots, A_{2n-1}$ und A_0.

Um nun die Gleichung (20) ausnutzen zu können, wählen wir die bei der Zerschneidung der Riemannschen Fläche zugrundegelegte Kurve $\mathfrak{L}$ so, daß sie bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ in sich selbst übergeht. Wir bezeichnen diejenige Durchlaufungsrichtung von $\mathfrak{L}$, bei der der Nullpunkt zur Linken liegt, als positiv. Wir wählen ferner $w_i = 0$, $w_a = \infty$ und auch die Gesamtheit der Kurven $\mathfrak{l}$ so, daß sie bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ in sich selbst übergeht. Sodann gestattet uns Gleichung (20) zu schließen, daß auch die Gesamtheit der Kurven $\mathfrak{C}$, sowie die Gesamtheit der Kurven $\mathfrak{c}$ bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ in sich selbst übergeht. Da zwei verschiedene der Kurven $\mathfrak{C}$ im Endlichen keinen Punkt gemeinsam haben, schließt man hieraus sofort Folgendes: Im Inneren des Kernpolygons verlaufen entweder überhaupt keine Kurven $\mathfrak{C}$; oder nur solche Kurven $\mathfrak{C}$, die die Ecken E_0 und E_2, die Ecken E_2 und E_4, die Ecken E_4 und $E_6, \ldots$, die Ecken E_{2n-2} und E_0 verbinden

(und zwar sind alle diese n Eckenpaare durch die gleiche Anzahl von Kurven $\mathfrak{C}$ verbunden); oder nur solche Kurven $\mathfrak{C}$, die die Ecken E_1 und E_3, die Ecken E_3 und E_5, die Ecken E_5 und $E_7, \ldots$, die Ecken E_{2n-1} und E_1 verbinden (und zwar sind alle diese n Eckenpaare durch die gleiche Anzahl von Kurven $\mathfrak{C}$ verbunden). Das Kernpolygon ist also entweder ein von Kurven $\mathfrak{C}$ freies $2n$-*Eck*. Oder es besteht aus einem zentralen n-*Eck* und aus n an dessen n Seiten angefügten *Dreiecken*. Zwischen dem zentralen n-Eck und jedem der n Dreiecke kann noch eine gewisse (bei allen n Dreiecken die gleiche) Anzahl von Streifengebieten eingefügt sein.

Nun gibt es stets insgesamt n verschiedene Reihenfolgen, nämlich

$$A_0, A_\varkappa, A_2, A_{\varkappa+2}, \ldots, A_{2n-2}, A_{\varkappa+2n-2} \qquad (\varkappa = 1, 3, \ldots, 2n-1)\ ^{12}),$$

in welchen die Grundpunkte von der Kurve $\mathfrak{L}$ so durchlaufen werden können, daß diese dabei noch alle an sie gestellten Forderungen erfüllt.

Betrachten wir zuerst den Fall $\varkappa = 1$, also die natürliche Durchlaufungsreihenfolge. Dann ist entweder das Kernpolygon frei von Kurven $\mathfrak{C}$. Oder es besteht aus einem zentralen n-Eck und aus n Dreiecken, von denen jedes unter Zwischenschaltung einer gewissen (bei allen n Dreiecken der gleichen) ungeraden Anzahl von Streifengebieten an eine der n Seiten des n-Ecks angefügt ist. Daß die Anzahl dieser Streifengebiete ungerade ist, ergibt sich so: Da das zentrale n-Eck den Punkt $z = 0$ enthält und da der diesem entsprechende Punkt $w=0$ in dem von $\mathfrak{L}$ umschlossenen Innengebiet $\mathfrak{G}_i$ liegt, so ist das zentrale n-Eck Urbild eines Exemplares von $\mathfrak{G}_i$. Durchläuft man den Rand der äußeren Dreiecke so, daß ihre drei Ecken in der Reihenfolge

$$E_\lambda, E_{\lambda+1}, E_{\lambda+2} \qquad (\lambda = 0, 2, \ldots, 2n-2 \text{ bzw. } \lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$$

getroffen werden, so liegen die von den Dreiecken umschlossenen Innengebiete zur Linken. Da die Kurve $\mathfrak{L}$ die entsprechenden Grundpunkte $A_\lambda, A_{\lambda+1}, A_{\lambda+2}$ bei positivem Umlauf in dieser natürlichen Reihenfolge trifft, so ist auch jedes der n äußeren Dreiecke Urbild eines über $\mathfrak{G}_i$ gelegenen Halbblattes. Somit muß jedes der äußeren Dreiecke durch eine ungerade Anzahl von Streifengebieten von dem zentralen n-Eck getrennt werden.

Nehmen wir nun den Fall $\varkappa = 3, 5, \ldots, 2n-1$, also eine andere als die natürliche Durchlaufungsreihenfolge. Dann kann das Kernpolygon nicht frei von Kurven $\mathfrak{C}$ sein. Denn sonst wäre es Urbild eines Exemplares von $\mathfrak{G}_i$, und dies widerspräche der Tatsache, daß seine Ecken in der Reihenfolge $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{2n-1}$ aufeinander folgen, während die entsprechenden Windungspunkte nicht in der natürlichen Reihenfolge von $\mathfrak{L}$ durchlaufen werden. Das Kernpolygon besteht vielmehr stets aus einem zentralen n-Eck und aus n Dreiecken, von denen jedes unter Zwischenschaltung einer gewissen (bei allen n Dreiecken gleichen) geraden Anzahl [13]) von Streifengebieten an eine der n Seiten des n-Ecks angefügt ist. Daß diese Anzahl gerade ist, erkennt man so: Durchläuft man den Rand der äußeren Dreiecke so, daß ihre drei Ecken in der Reihenfolge $E_\lambda, E_{\lambda+1}, E_{\lambda+2}$ $(\lambda = 0, 2, \ldots, 2n-2$ bzw. $\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$ angetroffen werden, so liegen die von den Dreiecken umschlossenen Innengebiete zur Linken. Da man die Kurve $\mathfrak{L}$ im negativen Sinne durchlaufen muß, um die entsprechenden drei Grundpunkte $A_\lambda, A_{\lambda+1}, A_{\lambda+2}$ in dieser Reihenfolge anzutreffen, so ist jedes der n äußeren Dreiecke Urbild eines über $\mathfrak{G}_a$ gelegenen Halbblattes. Daher kann, da das zentrale n-Eck

---

[12]) Etwa in diesem und dem nächsten Paragraphen auftretende Indizes, die $> 2n-1$ sind, sind mod $2n$ zu verstehen.

[13]) Diese gerade Anzahl kann auch gleich Null sein.

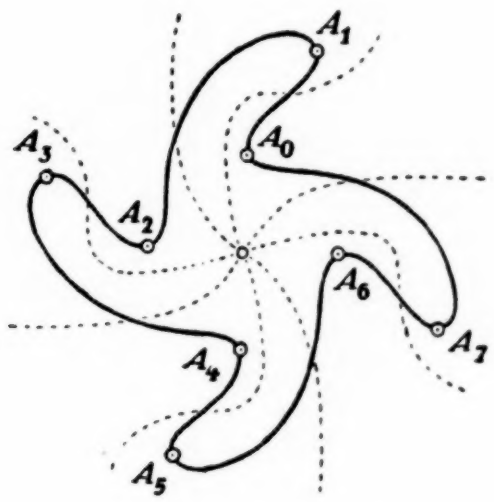


Fig. 3a. (w-Ebene)

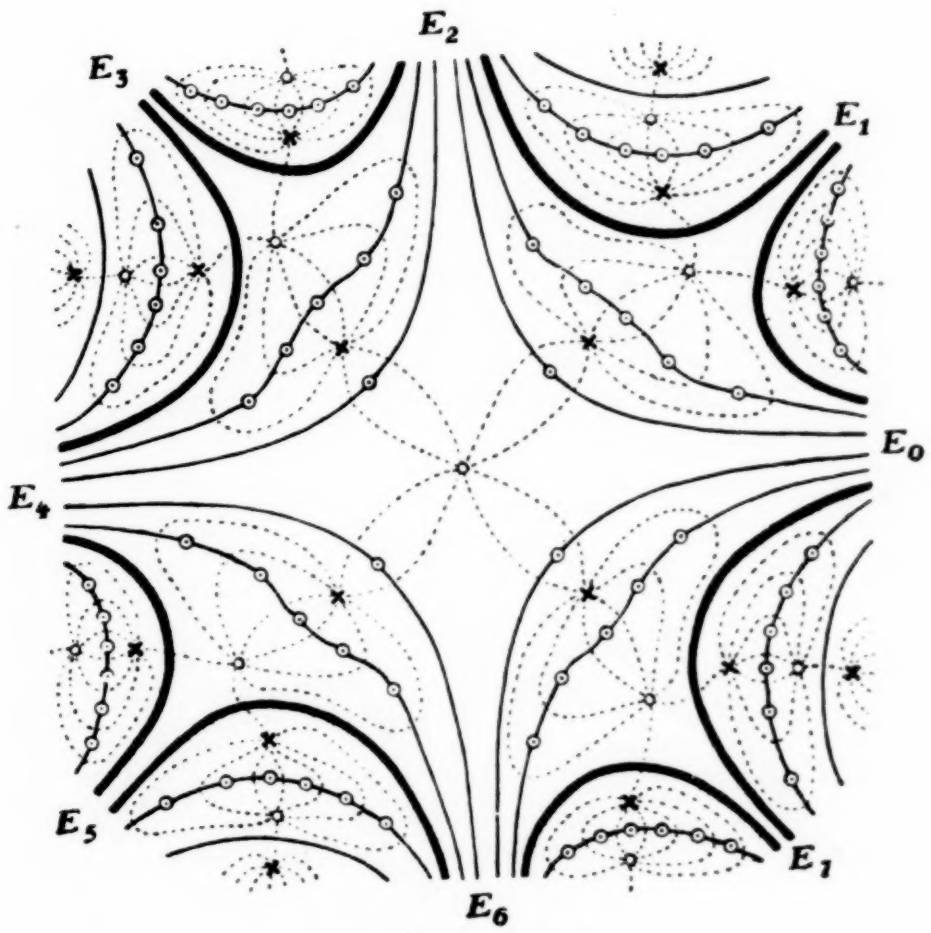


Fig. 3b. (z-Ebene)

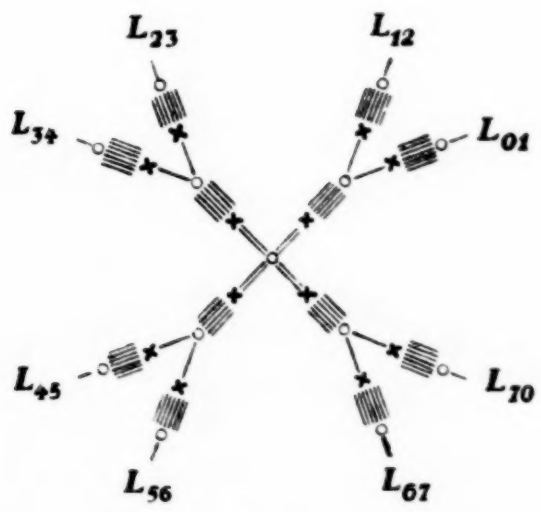


Fig. 3c. (Streckenkomplex)

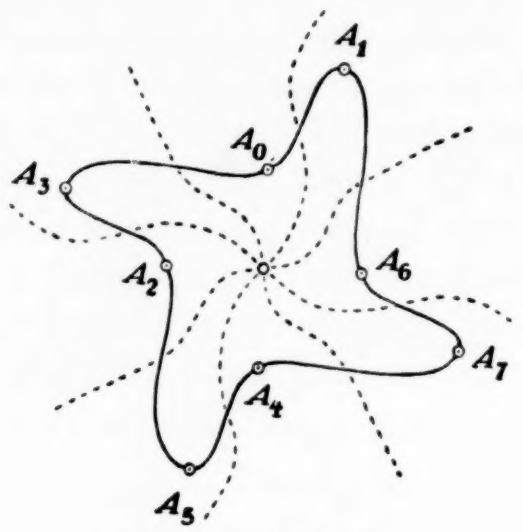


Fig. 4a. (w-Ebene)

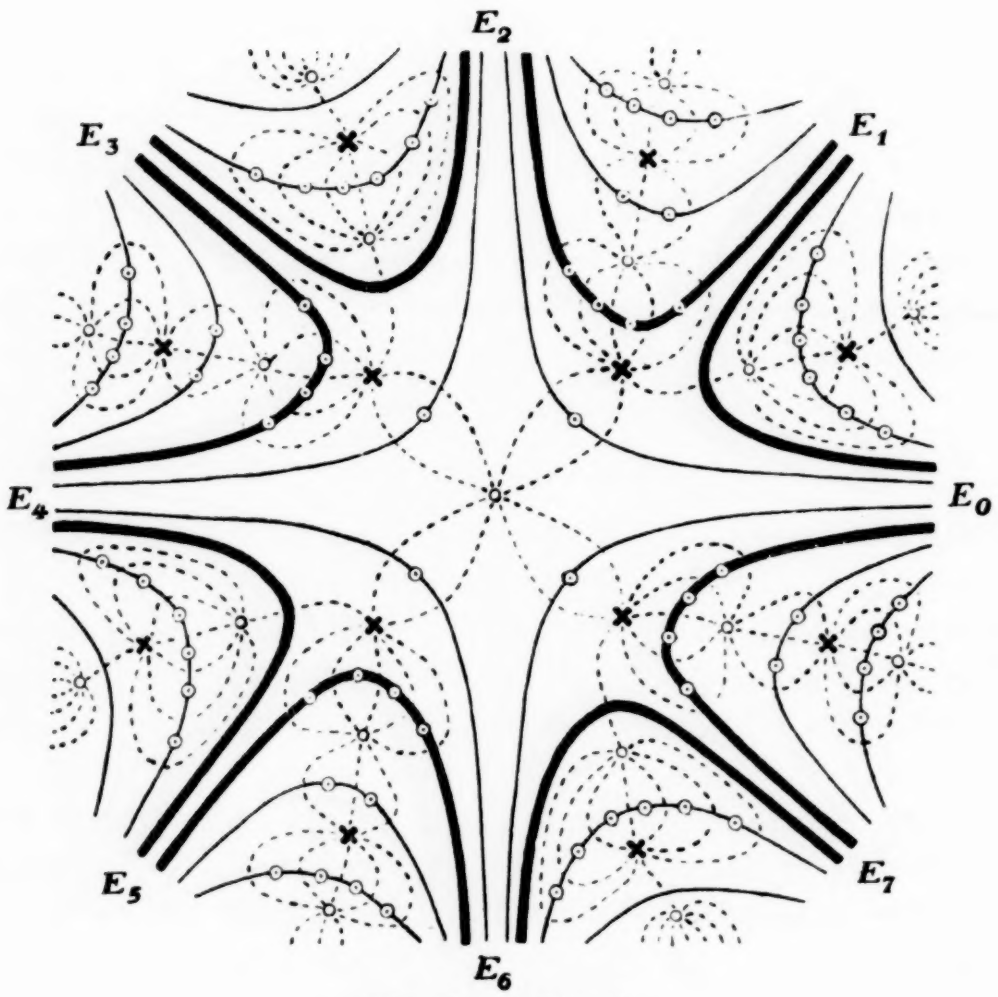


Fig. 4b. (z-Ebene)

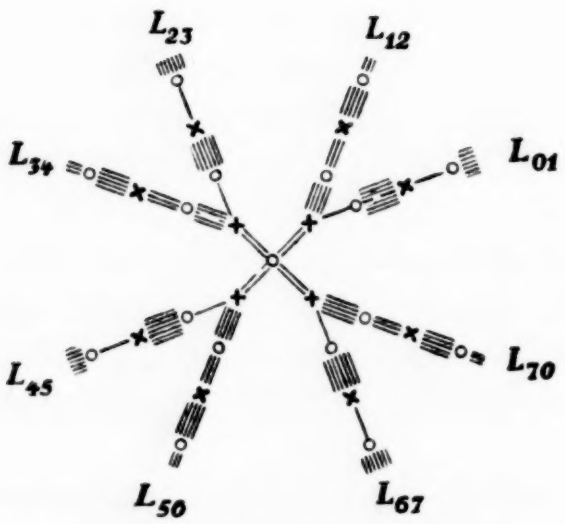


Fig. 4c. (Streckenkomplex)

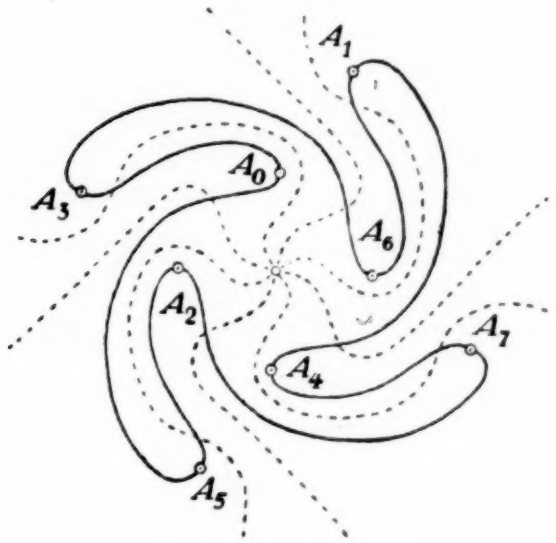


Fig. 5a. (w-Ebene)

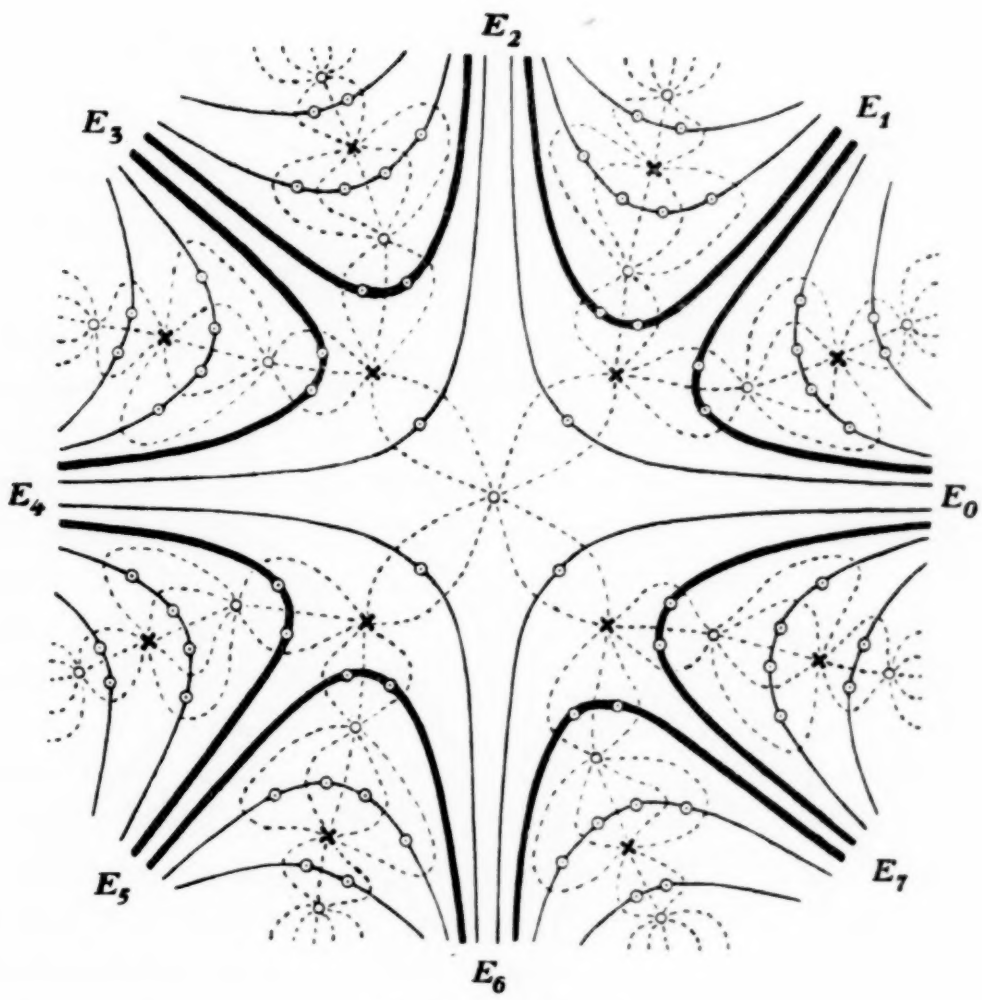


Fig. 5b. (z-Ebene)

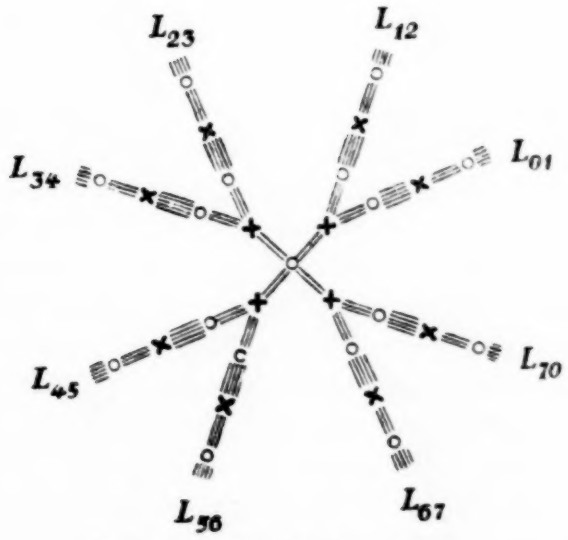


Fig. 5c. (Streckenkomplex)

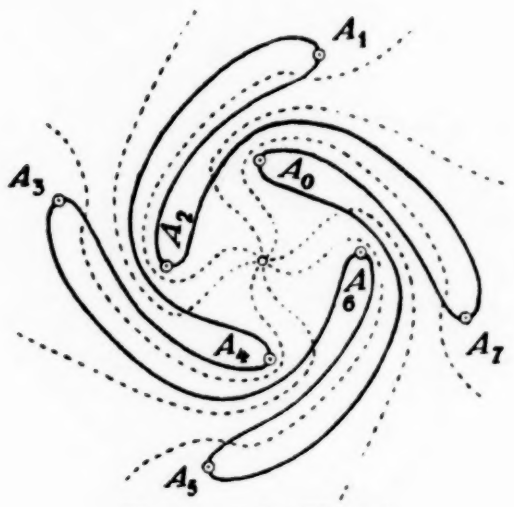


Fig. 6a. (w-Ebene)

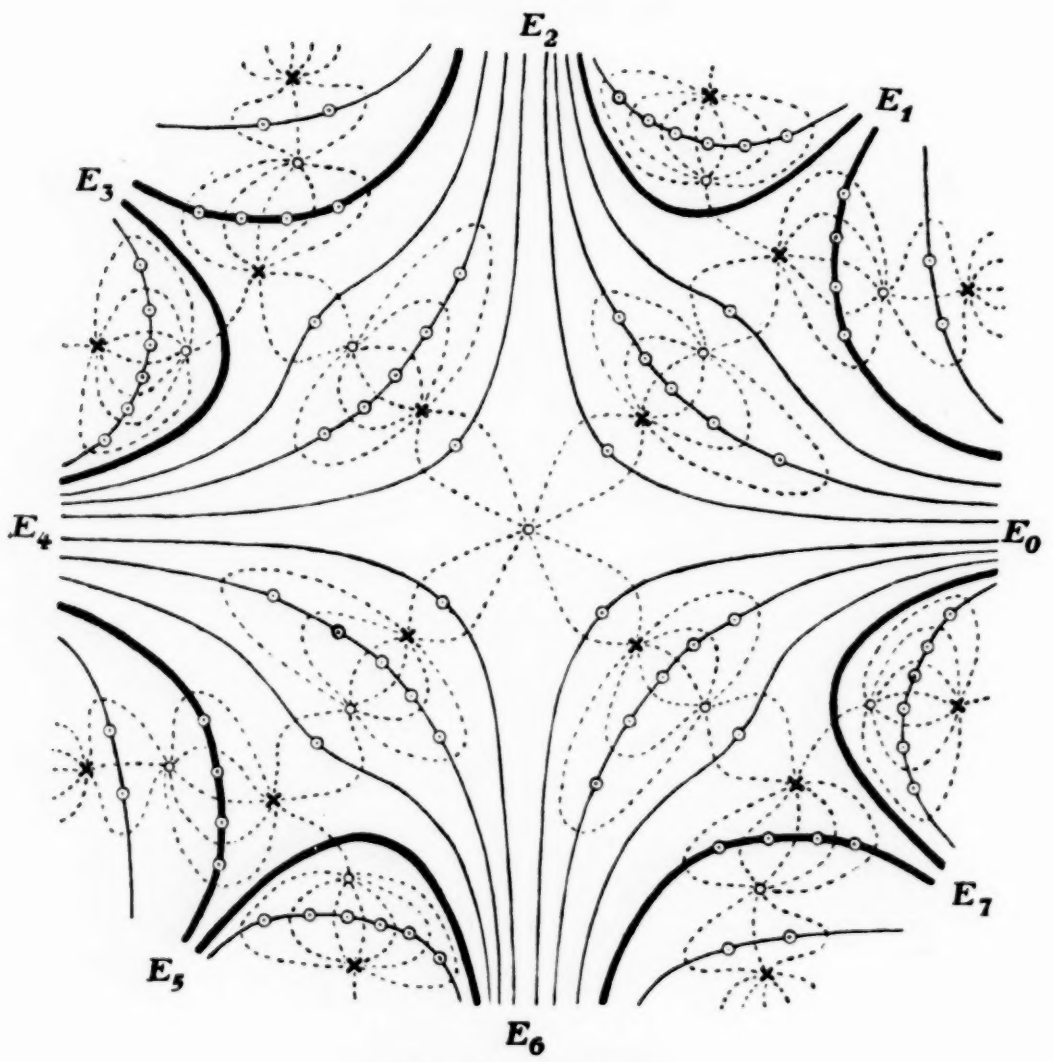


Fig. 6b. (z-Ebene)

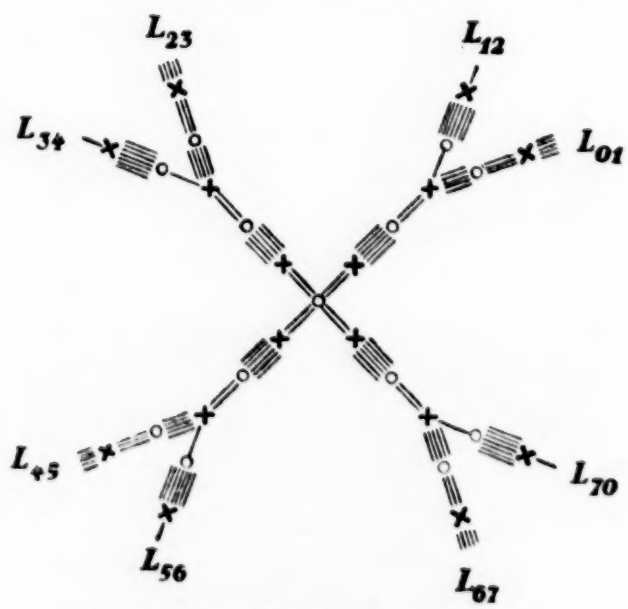


Fig. 6c. (Streckenkomplex)

Urbild eines Exemplares von $\mathfrak{G}_i$ ist, jedes der äußeren Dreiecke nur durch eine gerade Anzahl von Streifengebieten von dem zentralen n-Eck getrennt werden.

Nun wollen wir noch angeben, wie der zugehörige Streckenkomplex aussieht. Zuerst möge die Kurve $\mathfrak{L}$ die Grundpunkte in der natürlichen Reihenfolge durchlaufen. Dann enthält der Streckenkomplex entweder nur einen Verzweigungsknoten, einen Innenknoten, von dem die $2n$ logarithmischen Enden unmittelbar ausgehen, und zwar jedes mit einem Bündel aus einem Glied beginnend. Oder er enthält mehr als einen Verzweigungsknoten. Es gibt dann in dem Kern des Streckenkomplexes einen zentralen (Innen-)Knoten und n äußere Verzweigungsknoten. Jeder der äußeren Verzweigungsknoten, die sämtlich Innenknoten sind, ist durch eine endliche Folge von Bündeln und einfachen Knoten mit dem zentralen Knoten verbunden. Alle diese n Folgen enthalten die gleiche gerade Anzahl von Bündeln, beginnen am zentralen Knoten mit einem Bündel aus 2 Gliedern und endigen an den äußeren Verzweigungsknoten mit einem Bündel aus $2n-2$ Gliedern. Von jedem der äußeren Verzweigungsknoten gehen schließlich zwei logarithmische Enden

$$L_{\lambda\,\lambda+1} \text{ und } L_{\lambda+1\,\lambda+2} \quad (\lambda = 0, 2, \ldots, 2n-2, \text{ bzw. } \lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$$

aus, jedes mit einem Bündel aus einem Glied beginnend. Nun nehmen wir an, daß die Kurve $\mathfrak{L}$ die Grundpunkte in der Reihenfolge

$$A_0, A_\varkappa, A_2, A_{\varkappa+2}, \ldots, A_{2n-2}, A_{\varkappa+2n-2} \quad (\varkappa = 3, 5, \ldots, 2n-1)$$

durchläuft. Dann enthält der Streckenkomplex stets mehr als einen Verzweigungsknoten, und zwar gibt es in dem Kern wieder einen zentralen (Innen-) Knoten und n äußere Verzweigungsknoten. Jeder der äußeren Verzweigungsknoten, die sämtlich Außenknoten sind, ist durch eine endliche Folge von Bündeln und einfachen Knoten mit dem zentralen Knoten verbunden. Alle diese n Folgen enthalten die gleiche ungerade Anzahl von Bündeln, beginnen am zentralen Knoten mit einem Bündel aus zwei Gliedern und endigen an den äußeren Verzweigungsknoten mit einem Bündel aus zwei Gliedern. Von jedem der äußeren Verzweigungsknoten gehen schließlich zwei logarithmische Enden $L_{\lambda\,\lambda+1}$ und $L_{\lambda+1\,\lambda+2}$ $(\lambda = 0, 2, \ldots, 2n-2, \text{ bzw. } \lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$ aus, von denen dasjenige, dessen erster Index gerade ist, mit einem Bündel aus $\varkappa - 2$ Gliedern, dasjenige, dessen erster Index ungerade ist, mit einem Bündel aus $2n - \varkappa$ Gliedern beginnt.

Die von uns betrachtete Klasse von Riemannschen Flächen stellt also ein einfaches Beispiel dafür dar, daß der Streckenkomplex einer Riemannschen Fläche von ihrer Zerschneidung, insbesondere von der Reihenfolge, in der die Grundpunkte von der zerschneidenden Kurve $\mathfrak{L}$ getroffen werden, abhängen kann. Es ist mir nicht gelungen, bei unserer Flächenklasse die Anzahl der zwischen dem zentralen Knoten und den äußeren Verzweigungsknoten gelegenen Bündel in ihrer Abhängigkeit von c und $\mathfrak{L}$ näher zu bestimmen [14]).

---

[14]) Vgl. zu dem Vorhergehenden die Figuren 3 bis 6, in welchen eine der von uns betrachteten Riemannschen Flächen für den Fall $n = 4$ veranschaulicht wird. Es handelt sich in allen Figuren um dieselbe Riemannsche Fläche, bei deren Zerschneidung der Reihe nach die vier verschiedenen Durchlaufungsreihenfolgen der Grundpunkte zugrundegelegt werden. Es ist dargestellt: in den Figuren a die w-Ebene mit den Grundpunkten (kleine Kreise mit Mittelpunkt), der Kurve $\mathfrak{L}$ (ausgezogen) und den Kurven I (gestrichelt); in den Figuren b die entsprechende Konfiguration in der z-Ebene (die Kurven $\mathfrak{C}$ sind ausgezogen, darunter die Seiten des Kernpolygons besonders stark, die Kurven $\mathfrak{c}$ gestrichelt; kleine Kreise mit Mittelpunkt bezeichnen die Urpunkte zu den Grundpunkten); in den Figuren c der zugehörige Streckenkomplex (die Innenknoten sind durch kleine Kreise ohne Mittelpunkt, die Außenknoten durch kleine Kreuze gekennzeichnet). Es wurde dabei *angenommen*, daß durch die im Innern des Kernpolygons verlaufenden Kurven $\mathfrak{C}$ jedesmal die Ecken E_0 und E_2, E_2 und E_4, E_4 und E_6, E_6 und E_0 verbunden sind, und zwar in Fig. 3b durch je 2, in Fig. 4b durch je 1, in Fig. 5b durch je 1, in Fig. 6b durch je 3 Kurven $\mathfrak{C}$.

Nun noch eine Bemerkung für den Fall, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte über eine und dieselbe Kreislinie zu liegen kommen, daß also nach § 7 $\Re c \equiv 0 \pmod{n}$ ist. In diesem Falle denken wir uns als Kurve $\mathfrak{L}$ — dies ist am einfachsten — die Kreislinie gewählt, über der die Windungspunkte liegen. Dann liefern unsere allgemeinen Formeln für die Lage der logarithmischen Windungspunkte über die Reihenfolge, in der die Grundpunkte auf der Kreislinie $\mathfrak{L}$ aufeinander folgen, folgendes Ergebnis: Falls $\Re c$ ein gerades Vielfaches von n ist, so folgen die Grundpunkte auf der Kreislinie $\mathfrak{L}$ stets, d. h. unabhängig von $\Im c$ in der natürlichen Reihenfolge $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ aufeinander; falls $\Re c$ ein ungerades Vielfaches von n ist, so folgen sie stets in einer anderen als der natürlichen Reihenfolge aufeinander, und zwar für

$$\frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(\varkappa-3)\pi}{2n}}{\sin \frac{(\varkappa-1)\pi}{2n}} < \Im c < \frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(\varkappa-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(\varkappa+1)\pi}{2n}} \qquad (\varkappa = 3, 5, \ldots, 2n-1)$$

in der Reihenfolge $A_0, A_\varkappa, A_2, A_{\varkappa+2}, \ldots, A_{2n-2}, A_{\varkappa+2n-2}$. Im übrigen gilt über das Kernpolygon und den Streckenkomplex das, was oben für die jeweilige Durchlaufungsreihenfolge gesagt wurde. Daher ist (vorausgesetzt, daß als Kurve $\mathfrak{L}$ die mehrfach genannte Kreislinie gewählt wird) zu vermuten, daß im Falle $\Re c = 0$ das Kernpolygon frei von Kurven $\mathfrak{C}$ ist und daß im Falle $\Re c = jn$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ die Ecken E_0 und E_2, E_2 und E_4, $\ldots$, E_{2n-2} und E_0, im Falle $\Re c = -jn$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ die Ecken E_1 und E_3, E_3 und E_5, $\ldots$, E_{2n-1} und E_1 durch je j Kurven $\mathfrak{C}$ verbunden sind.

§ 10. *Die Struktur der Riemannschen Fläche in dem Falle, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte paarweise übereinander zu liegen kommen.*

Nun wenden wir uns zu dem nur bei $n \geqq 3$ vorkommenden und für

$$c = (2j+1)n + i\frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(k-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}} \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ k = 3, 5, \ldots, 2n-3)$$

eintretenden Falle, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte paarweise übereinander zu liegen kommen (Fall II des Satzes von Seite 28f.). Als Kurve $\mathfrak{L}$ denken wir uns stets die Kreislinie gewählt, über der die Windungspunkte liegen. Dann gelangt man durch ebenso einfache Schlüsse wie im vorigen Paragraphen zu folgendem Ergebnis:

Das Kernpolygon besteht stets aus einem zentralen n-Eck und aus n an dessen n Seiten angefügten Dreiecken. Zwischen dem zentralen n-Eck und jedem der n Dreiecke kann noch eine gewisse (bei allen n Dreiecken gleiche), gerade Anzahl von Streifengebieten eingefügt sein. Der Kern des Streckenkomplexes enthält somit einen zentralen Verzweigungsknoten (Innenknoten) und n äußere Verzweigungsknoten. Jeder der äußeren Verzweigungsknoten, die sämtlich Außenknoten sind, ist mit dem zentralen Knoten durch eine endliche Folge von Bündeln und einfachen Knoten verbunden. Alle diese n Folgen enthalten die gleiche ungerade Anzahl von Bündeln, beginnen am zentralen Knoten mit einem Bündel aus einem Glied und endigen an den äußeren Verzweigungsknoten mit einem Bündel aus einem Glied. Von jedem der äußeren Verzweigungsknoten gehen schließlich zwei logarithmische Enden $L_{\lambda\,\lambda+1}$ und $L_{\lambda+1\,\lambda+2}$ $(\lambda = 0, 2, \ldots, 2n-2,$ bzw. $\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$ aus, von denen für

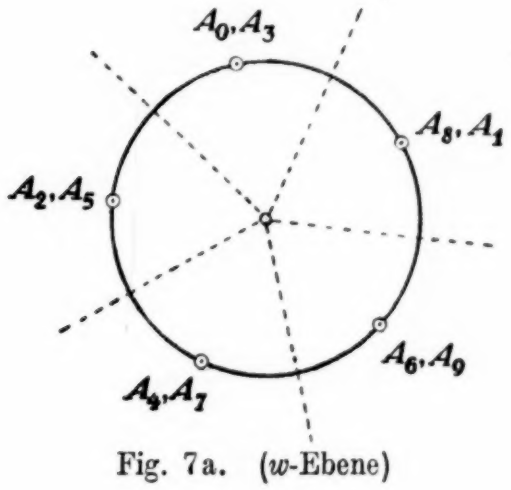


Fig. 7a. (w-Ebene)

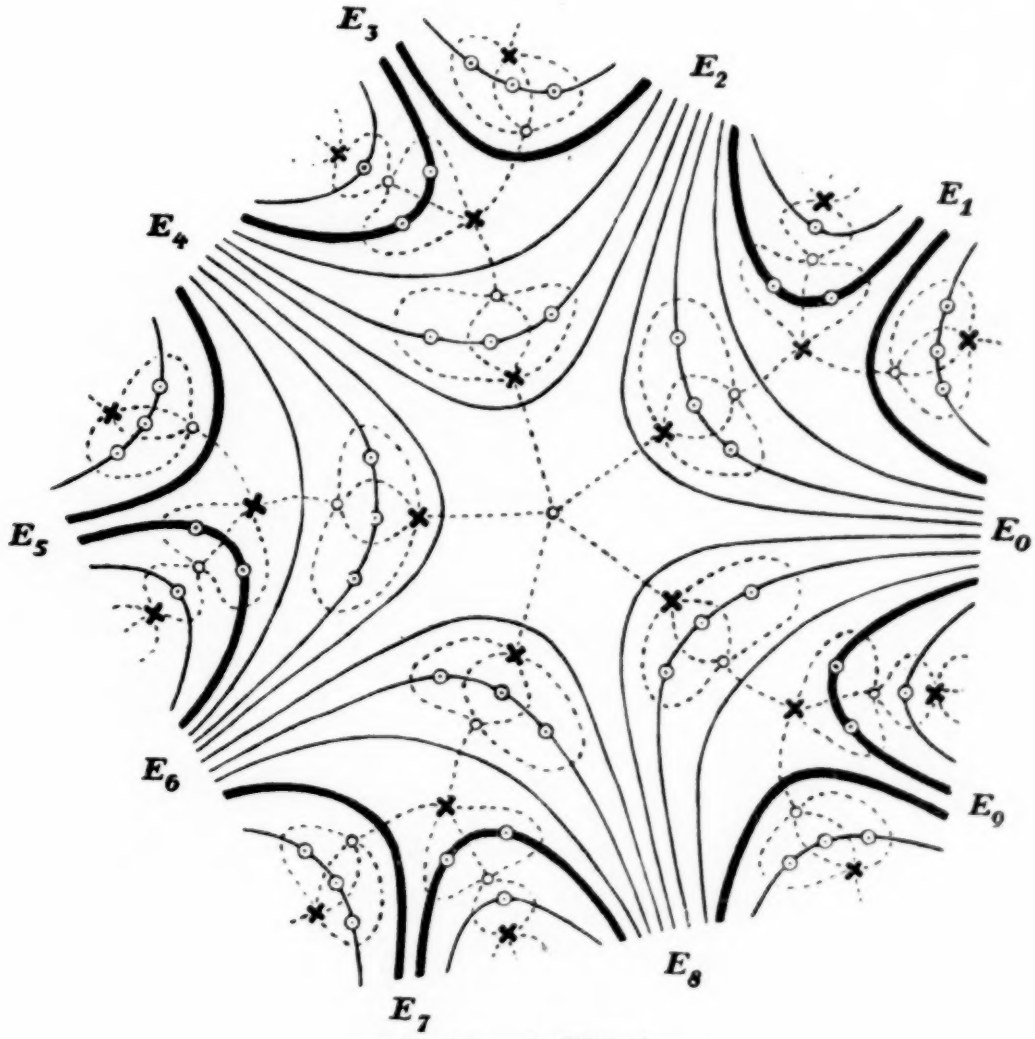


Fig. 7b. (z-Ebene)

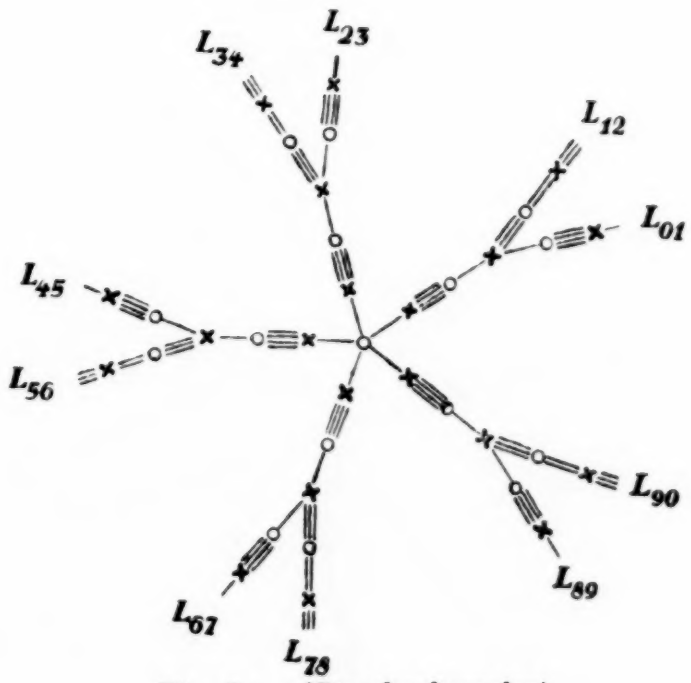


Fig. 7c. (Streckenkomplex)

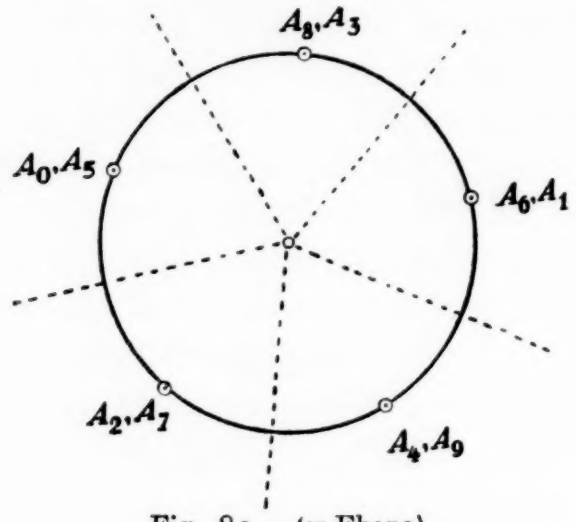


Fig. 8a. (w-Ebene)

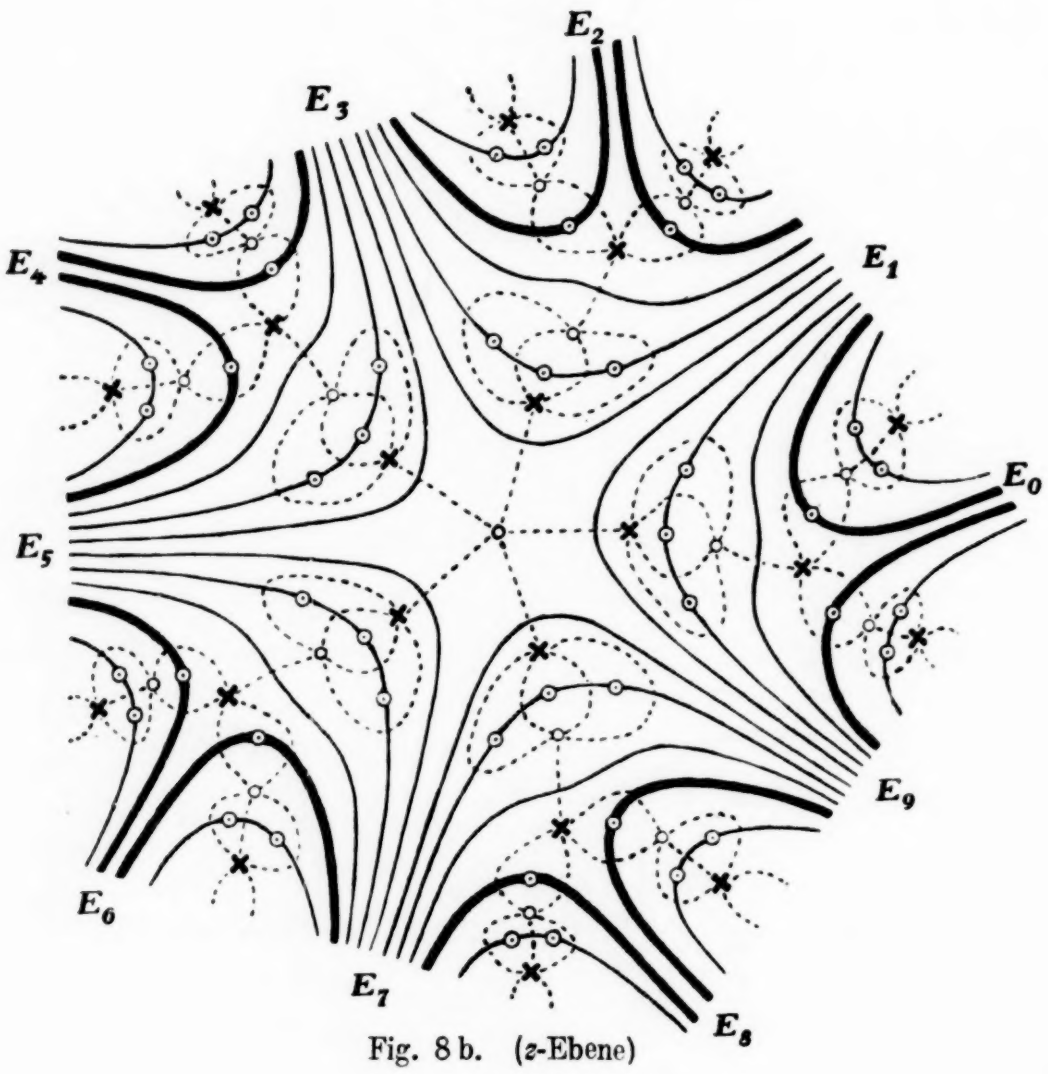


Fig. 8b. (z-Ebene)

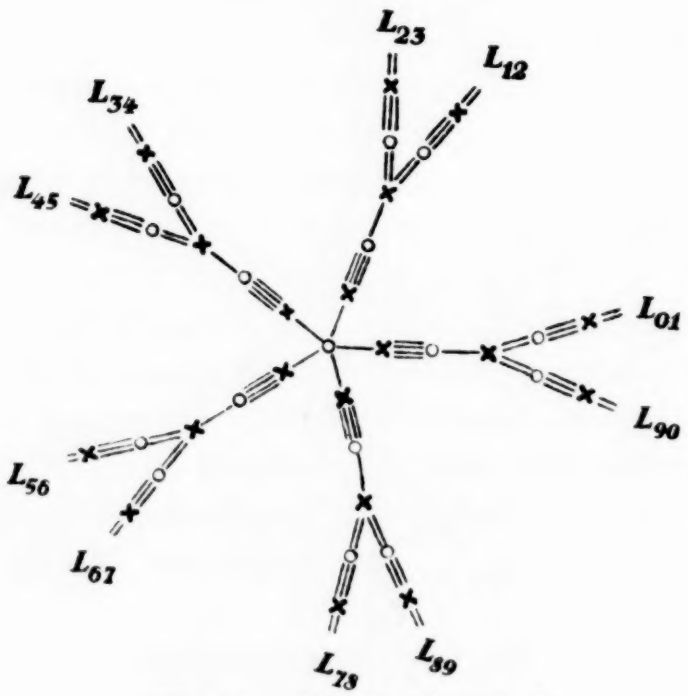


Fig. 8c. (Streckenkomplex)

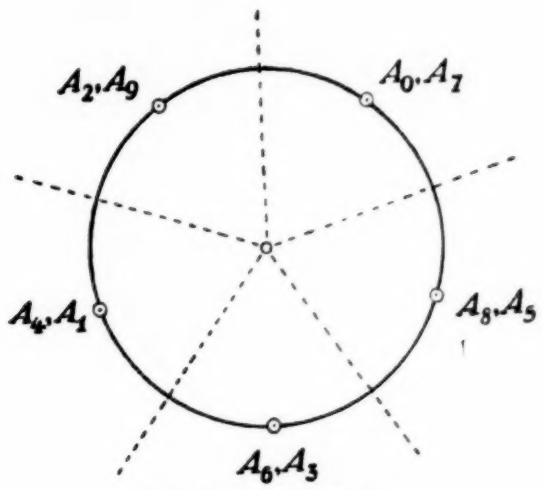


Fig. 9a. (w-Ebene)

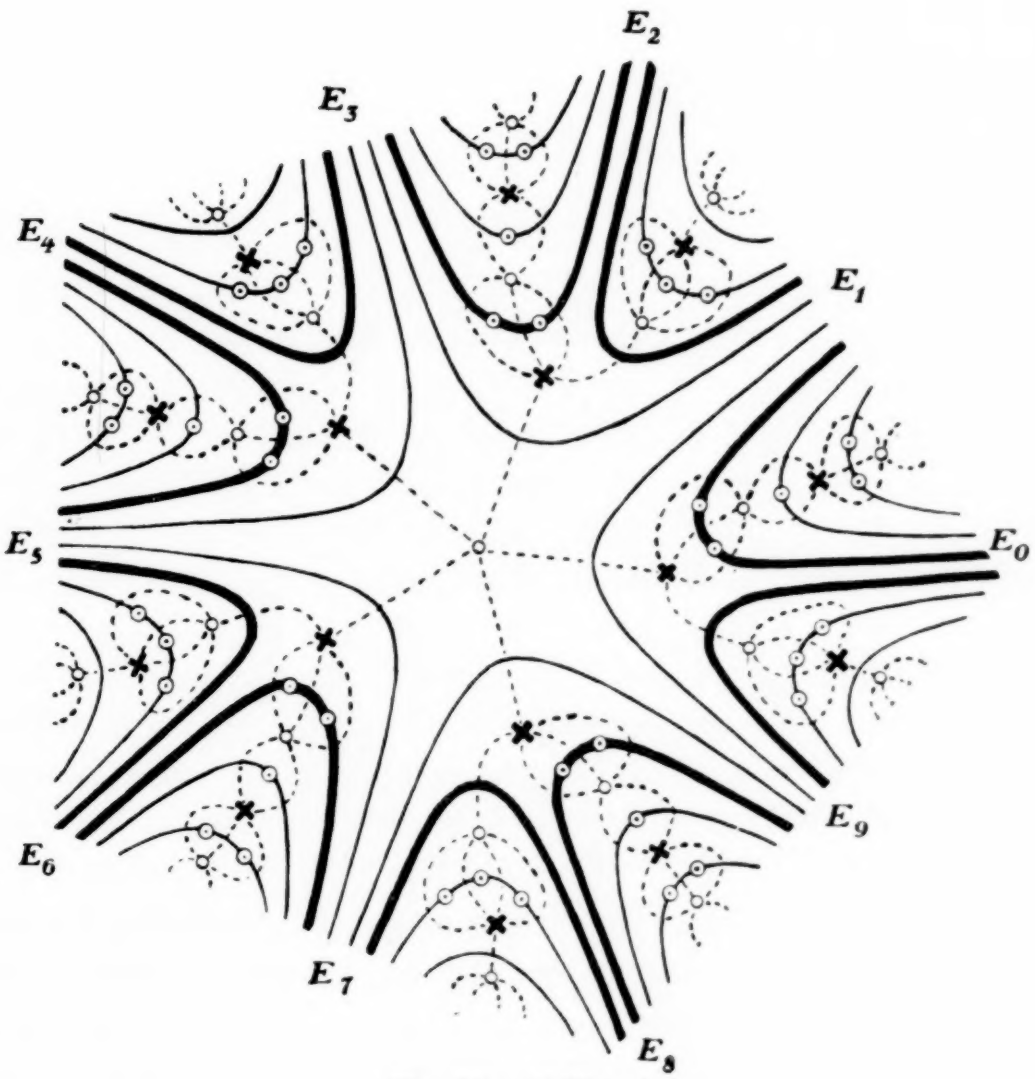


Fig. 9b. (z-Ebene)

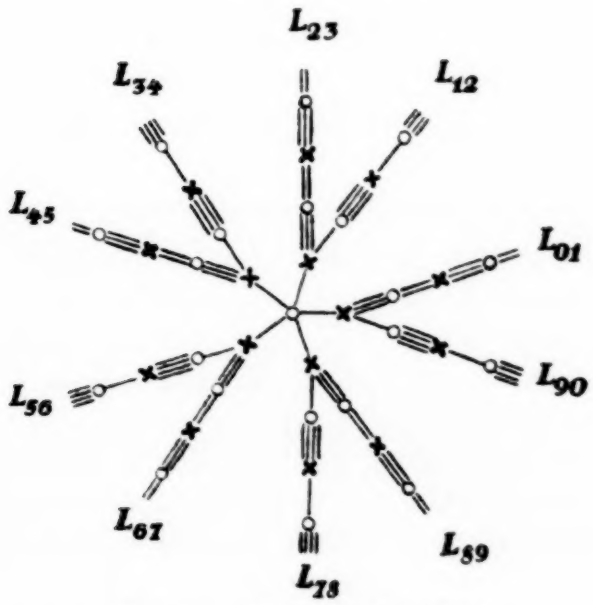


Fig. 9c. (Streckenkomplex)

$$\Im c = \frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \dfrac{(k-1)\pi}{2n}}{\sin \dfrac{(k+1)\pi}{2n}} \qquad (k = 3, 5, \ldots, 2n-3)$$

dasjenige, dessen erster Index gerade ist, mit einem Bündel aus $\frac{k-1}{2}$ Gliedern, dasjenige, dessen erster Index ungerade ist, mit einem Bündel aus $\frac{2n-k-1}{2}$ Gliedern beginnt. Es ist zu vermuten, daß für

$$\Re c = (2j+1)n \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

jeder der äußeren Verzweigungsknoten durch $|2j+1|$ Bündel mit dem zentralen Knoten verbunden ist, und daß im Falle $\Re c > 0$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ die logarithmischen Enden $L_{\lambda\,\lambda+1}$ und $L_{\lambda+1\,\lambda+2}$ $(\lambda = 0, 2, \ldots, 2n-2)$, im Falle $\Re c < 0$ $(j = -1, -2, \ldots)$ die logarithmischen Enden $L_{\lambda\,\lambda+1}$ und $L_{\lambda+1\,\lambda+2}$ $(\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$ von demselben äußeren Verzweigungsknoten ausgehen [15]).

§ 11. *Darstellung von $w_n(z, c)$ für den Fall, daß von den $2n$ logarithmischen Windungspunkten n über eine und dieselbe Stelle zu liegen kommen; anschließende Aussagen über die Riemannsche Fläche.*

Bei dem nunmehr zu betrachtenden Falle, daß von den $2n$ logarithmischen Windungspunkten n über eine und dieselbe Stelle zu liegen kommen (Fall III des Satzes von Seite 28f.), gehen wir etwas anders und zwar mehr analytisch vor. Wir leiten zunächst eine einfache Darstellung für die Grundlösung $w_n(z, c)$ der Gleichung (17) her. Daraus werden wir dann unmittelbar eine Aussage über die Riemannsche Fläche ablesen können.

Die folgenden Betrachtungen sind vollkommen unabhängig von Teil 2. Wir brauchen von dort nicht einmal die Kenntnis der Werte von c, für die der obige Fall eintritt. Diese Werte von c werden sich vielmehr auf einem anderen Wege noch einmal nebenbei ergeben. Aus der in Fußnote [1]) genannten Nevanlinnaschen Arbeit benötigen wir die folgenden beiden Tatsachen:

1. Zwei benachbarten Ecken des Kernpolygons entsprechen niemals zwei über einem und demselben Grundpunkt gelegene logarithmische Windungspunkte.

2. Die Nevanlinnaschen Funktionen $w(z)$ lassen in jedem logarithmischen Ende zwei Werte aus; diesen Ausnahmewerten sind die Punkte zugeordnet, um die sich das dem logarithmischen Ende entsprechende Riemannsche Flächenstück windet.

c sei nun so beschaffen, daß eine Lösung $w(z)$ der Gleichung

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2} \tag{17}$$

die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche abbildet, welche über $w = \infty$ n logarithmische Windungspunkte besitzt. Dabei braucht $w(z)$ nicht notwendig die Grundlösung von (17) zu sein.

---

[15]) Vgl. zu diesem Paragraphen die Figuren 7 bis 9, in welchen für den Fall $n = 5$ zu den drei Möglichkeiten des paarweisen Übereinanderfallens der Windungspunkte je eine Riemannsche Fläche veranschaulicht wird. Dabei wurde *angenommen*, daß in Fig. 7b die Ecken E_0 und $E_2, \ldots, E_8$ und E_0 durch je 3 Kurven $\mathfrak{C}$, in Fig. 8b die Ecken E_1 und $E_3, \ldots, E_9$ und E_1 durch je 3 Kurven $\mathfrak{C}$, in Fig. 9b die Ecken E_1 und $E_3, \ldots, E_9$ und E_1 durch je 1 Kurve $\mathfrak{C}$ verbunden sind. Bezüglich der Darstellung der verschiedenen Punkte und Kurven vgl. Fußnote [14]).

Dann folgt aus der obigen Tatsache 1, daß von den beiden Ecken einer jeden Seite des Kernpolygons [16]) stets die eine einem im Endlichen gelegenen Windungspunkt, die andere einem im Unendlichen gelegenen Windungspunkt entspricht. Nach der Tatsache 2 besitzt daher $w(z)$ in jedem logarithmischen Ende außer einem endlichen Ausnahmewert den Ausnahmewert ∞. Daher kann $w(z)$ den Wert ∞ nur im Kernpolygon annehmen. Da aber nun im Kernpolygon jeder Wert nur endlich oft angenommen wird, so besitzt $w(z)$ überhaupt nur endlich viele Pole. Wie wir wissen, läßt sich $w(z)$ als Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (18) darstellen. Jede Lösung von (18) ist bekanntlich eine ganze Funktion der Ordnung n, und je zwei linear unabhängige Lösungen von (18) haben keine gemeinsame Nullstelle. Daher gibt es eine Lösung $g(z)$ von (18), welche die Pole von $w(z)$ als Nullstellen, außer diesen aber keine Nullstelle mehr hat. Diese Lösung $g(z)$ hat also bloß endlich viele Nullstellen, und nach Division durch ein Polynom $D(z)$, welches in denselben Punkten wie $g(z)$ verschwindet, bleibt eine ganze Funktion ohne Nullstellen übrig. Da diese ganze Funktion $\left(\text{der Quotient } \frac{g(z)}{D(z)}\right)$ die Ordnung n hat, ist sie von der Form $e^{d(z)}$, wo $d(z)$ ein Polynom vom Grade n bedeutet.

Für jeden der oben näher gekennzeichneten Werte von c besitzt somit die Gleichung

$$g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2})\, g = 0 \tag{18}$$

eine Lösung von der Form

$$g(z) = D(z)\, e^{d(z)}, \tag{49}$$

wo $D(z)$ und $d(z)$ Polynome sind; der Grad von $D(z)$, den wir mit h bezeichnen wollen, ist gleich der Anzahl der Pole von $w(z)$, der Grad von $d(z)$ ist gleich n.

Geht man mit dem Ansatz (49) in die Gleichung (18), so erhält man

$$D'' + 2d'D' + (d'' + d'^2 - z^{2n-2} - cz^{n-2})\, D = 0\,. \tag{50}$$

Aus dieser Gleichung werden wir zunächst $d(z)$ ermitteln. Es sei

$$D(z) = \sum_{k=0}^{h} D_k z^k, \qquad d(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k z^k\,.$$

Dann ist auf der linken Seite von (50) der Koeffizient von z^{2n+h-2} gleich $(n^2 d_n^2 - 1)\, D_h$. Also ergibt sich, da $D_h \neq 0$ ist,

$$d_n^2 = \frac{1}{n^2}, \qquad d_n = \pm \frac{1}{n}\,.$$

Die weiteren Koeffizienten $d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots, d_2, d_1$ ergeben sich alle zu Null. Denn angenommen, es würden nicht alle Koeffizienten $d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots, d_2, d_1$ verschwinden. Wenn dann d_j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ von den nichtverschwindenden Koeffizienten derjenige mit dem größten Index wäre, so wäre auf der linken Seite von (50) der Koeffizient von $z^{n+j+h-2}$ gleich $2n\, d_n\, j\, d_j\, D_h$, also $\neq 0$, während er doch nach Gleichung (50) verschwinden muß. Daher ist in der Tat

$$d_{n-1} = d_{n-2} = \cdots = d_2 = d_1 = 0\,.$$

Über d_0 läßt sich aus (50) nichts schließen. Da jedoch d_0 in (49) nur den unwesentlichen konstanten Faktor e^{d_0} liefert, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

---

[16]) Die bei der Zerschneidung der Riemannschen Fläche zugrunde gelegte Kurve $\mathfrak{L}$, die sich nun nicht mehr so wählen läßt, daß sie bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ in sich selbst übergeht, denken wir uns beliebig festgelegt.

$d_0 = 0$ wählen. Wir haben somit

$$d(z) = \pm \frac{1}{n} z^n .$$

Hiernach reduziert sich Gleichung (50) auf

$$D'' \pm 2z^{n-1} D' + (\pm (n-1) - c)\, z^{n-2} D = 0 . \tag{51}$$

(In (51) gehören, wie auch stets im folgenden, die oberen Vorzeichen zu $d(z) = + \frac{1}{n} z^n$, die unteren Vorzeichen zu $d(z) = - \frac{1}{n} z^n$.)

Beachtet man den Ansatz

$$D(z) = \sum_{k=0}^{h} D_k z^k ,$$

so folgt aus (51) zunächst:

$$\begin{aligned} &D_2 = 0, \quad D_3 = 0, \ldots, \quad D_{n-1} = 0 , \\ &D_{n+2} = 0, \; D_{n+3} = 0, \ldots, \; D_{2n-1} = 0 , \\ &D_{2n+2} = 0, \; D_{2n+3} = 0, \ldots, \; D_{3n-1} = 0 \end{aligned}$$

usw., also allgemein

$$D_k = 0, \text{ wenn sowohl } k \not\equiv 0 \pmod n \text{ als auch } k \not\equiv 1 \pmod n .$$

Für die Koeffizienten D_k mit $k \equiv 0 \pmod n$ ergibt sich aus (51) das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} n(n-1)\, D_n + (\pm (n-1) - c)\, D_0 = 0 \\ 2n(2n-1)\, D_{2n} + (\pm (3n-1) - c)\, D_n = 0 \\ 3n(3n-1)\, D_{3n} + (\pm (5n-1) - c)\, D_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{52}$$

oder allgemein für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$

$$(\mu+1)n\,((\mu+1)n-1)\, D_{(\mu+1)n} + \{\pm ((2\mu+1)n-1) - c\}\, D_{\mu n} = 0 . \tag{53}$$

Für die Koeffizienten D_k mit $k \equiv 1 \pmod n$ erhält man aus (51) das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} (n+1)n\, D_{n+1} + (\pm (n+1) - c)\, D_1 = 0 \\ (2n+1)2n\, D_{2n+1} + (\pm (3n+1) - c)\, D_{n+1} = 0 \\ (3n+1)3n\, D_{3n+1} + (\pm (5n+1) - c)\, D_{2n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{54}$$

oder allgemein für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$((\nu+1)n+1)\,(\nu+1)n\, D_{(\nu+1)n+1} + \{\pm ((2\nu+1)n+1) - c\}\, D_{\nu n+1} = 0 . \tag{55}$$

Nun soll aber $D(z)$ ein (nicht identisch verschwindendes) Polynom sein. Daher müssen sich die Koeffizienten D_k aus (52) und aus (54) von einem gewissen Index an alle zu Null ergeben. Dies ist nur dann möglich, wenn entweder in (53) für eine gewisse Zahl μ der Folge 0, 1, 2, ... oder in (55) für eine gewisse Zahl ν der Folge 0, 1, 2, ... die geschweifte Klammer verschwindet, d. h. wenn

$$\begin{aligned} &\text{entweder} \quad c = \pm ((2\mu+1)n - 1) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \\ &\text{oder} \qquad\; c = \pm ((2\nu+1)n + 1) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

ist. Nur für diese Werte von c kann demnach die Gleichung (51) von einem nicht identisch verschwindenden Polynom befriedigt werden.

Wir nehmen zunächst die erste Möglichkeit

$$c = \pm ((2\mu + 1)n - 1) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Dann ist in (55) die geschweifte Klammer für jede Zahl ν der Folge $0, 1, 2, \ldots$ von Null verschieden. Wäre $D_1 \neq 0$, so würden sich also aus (54) auch die unendlich vielen Koeffizienten $D_{n+1}, D_{2n+1}, D_{3n+1}, \ldots$ alle ungleich Null ergeben. Dann wäre aber $D(z)$ kein Polynom. Daher muß D_1 verschwinden und folglich nach (54) auch $D_{n+1}, D_{2n+1}, D_{3n+1}, \ldots$ Um nicht die triviale Lösung $D(z) \equiv 0$ zu erhalten, muß man D_0 von Null verschieden wählen. Das Gleichungssystem (52) liefert sodann die Koeffizienten $D_n, D_{2n}, D_{3n}, \ldots$, und zwar ergeben sich $D_n, D_{2n}, \ldots, D_{\mu n}$ als von Null verschieden, dagegen $D_{(\mu+1)n}, D_{(\mu+2)n}, \ldots$ zu Null. Das Polynom $D(z)$ ist somit vom Grade $h = \mu n$ und genügt, da alle Koeffizienten D_k mit $k \not\equiv 0 \pmod{n}$ verschwinden, der Beziehung $D\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z\right) = D(z)$. Wir wollen dieses Polynom genauer auch mit $D^{+}_{\mu n, n}(z)$ bzw. $D^{-}_{\mu n, n}(z)$ bezeichnen, je nachdem ob es zu $c = +((2\mu + 1)n - 1)$ oder zu $c = -((2\mu + 1)n - 1)$ gehört. Wir haben also das Ergebnis:

Die Gleichung (18) besitzt für $c = \pm ((2\mu + 1)n - 1)$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Lösung von der Form

$$g(z) = D^{\pm}_{\mu n, n}(z)\, e^{\pm \frac{1}{n} z^n} .$$

Hierin ist $D^{\pm}_{\mu n, n}(z)$ ein Polynom vom Grade $h = \mu n$, welches der Differentialgleichung

$$D'' \pm 2 z^{n-1} D' \mp 2\mu n\, z^{n-2} D = 0$$

genügt und daher explizit durch

$$D^{\pm}_{\mu n, n}(z) = D_0 \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \frac{(\pm 2)^{\varkappa} \binom{\mu}{\varkappa}}{n^{\varkappa} \varkappa! \binom{\varkappa - \frac{1}{n}}{\varkappa}} z^{\varkappa n}$$

dargestellt wird.

Wir betrachten nun die zweite Möglichkeit

$$c = \pm ((2\nu + 1)\, n + 1) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann ist in (53) die geschweifte Klammer für jede Zahl μ der Folge $0, 1, 2, \ldots$ ungleich Null. Wäre $D_0 \neq 0$, so würde also das Gleichungssystem (52) auch die unendlich vielen Koeffizienten $D_n, D_{2n}, D_{3n}, \ldots$ alle als von Null verschieden ergeben. Dann wäre aber $D(z)$ kein Polynom. Somit muß D_0 verschwinden und folglich nach (52) auch $D_n, D_{2n}, D_{3n}, \ldots$ Damit $D(z)$ nicht identisch verschwindet, muß man D_1 von Null verschieden wählen. Das Gleichungssystem (54) liefert sodann die Koeffizienten $D_{n+1}, D_{2n+1}, D_{3n+1}, \ldots$, und zwar ergeben sich $D_{n+1}, D_{2n+1}, \ldots, D_{\nu n+1}$ als von Null verschieden, dagegen $D_{(\nu+1)n+1}, D_{(\nu+2)n+1}, \ldots$ zu Null. Das Polynom $D(z)$ hat daher den Grad $h = \nu n + 1$ und befriedigt, da alle Koeffizienten D_k mit $k \not\equiv 1 \pmod{n}$ verschwinden, die Beziehung $D\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}} D(z)$. Wir wollen dieses Polynom genauer auch mit $D^{+}_{\nu n+1, n}(z)$ bzw. $D^{-}_{\nu n+1, n}(z)$ bezeichnen, je nachdem ob es zu $c = +((2\nu + 1)n + 1))$ oder zu $c = -((2\nu + 1)n + 1)$ gehört. Wir haben somit das Ergebnis:

Die Gleichung (18) besitzt für $c = \pm((2\nu+1)n+1)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Lösung von der Form

$$g(z) = D^{\pm}_{\nu n+1,n}(z)\, e^{\pm\frac{1}{n}z^n}.$$

Hierin ist $D^{\pm}_{\nu n+1,n}(z)$ ein Polynom vom Grade $h = \nu n + 1$, welches der Differentialgleichung

$$D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2(\nu n+1)z^{n-2}D = 0$$

genügt und daher explizit durch

$$D^{\pm}_{\nu n+1,n}(z) = D_1 \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \frac{(\pm 2)^{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}}{n^{\varkappa}\varkappa!\binom{\varkappa+\frac{1}{n}}{\varkappa}} z^{\varkappa n+1}$$

dargestellt wird.

Die beiden, für $c = \pm((2\mu+1)n-1)$ und für $c = \pm((2\nu+1)n+1)$ gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch gemeinsam in folgender Weise aussprechen:

Die Gleichung (18) *besitzt, falls* $c = \pm(2h+n-1)$ *und* h *eine der Zahlen* $0, 1, n, n+1, 2n, 2n+1, 3n, 3n+1, \ldots$ *ist, eine Lösung von der Form*

$$g(z) = D^{\pm}_{h,n}(z)\, e^{\pm\frac{1}{n}z^n},$$

wo $D^{\pm}_{h,n}(z)$ *ein Polynom vom Grade* h *bedeutet, welches die Gleichung*

$$D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2hz^{n-2}D = 0 \tag{56}$$

befriedigt.

Wie aus unseren Betrachtungen hervorgeht, sind die Werte

$$c = \pm(2h+n-1) \qquad (h = 0, 1, n, n+1, 2n, 2n+1, \ldots)$$

auch die einzigen Werte von c, für welche die Gleichung (18) eine Lösung von der Form (49) hat.

Beachtet man, daß die Gleichung (17) durch die Substitution $w' = g^{-2}$ in die Gleichung (18) übergeht (vgl. § 1), so erkennt man folgendes:

Die Gleichung (17) *besitzt, wenn* $c = \pm(2h+n-1)$ *und* h *eine der Zahlen* $0, 1, n, n+1, 2n, 2n+1, \ldots$ *ist, eine Lösung von der Form*

$$w(z) = \int_{t_0}^{z} \frac{e^{\mp\frac{2}{n}t^n}}{(D^{\pm}_{h,n}(t))^2}\, dt, \tag{57}$$

wo $D^{\pm}_{h,n}(z)$ *ein Polynom vom Grade* h *bedeutet, welches der Gleichung* (56) *genügt.* t_0 *ist beliebig zu wählen, jedoch so, daß* $D^{\pm}_{h,n}(t_0) \neq 0$ *wird.*

Wie aus der Darstellung (57) folgt, besitzt diese meromorphe Funktion $w(z)$ den Wert ∞ als Picardschen Ausnahmewert im weiteren Sinne und zugleich als Nevanlinnaschen Ausnahmewert mit dem Defekt 1. Daher bildet in der Tat die durch (57) dargestellte meromorphe Funktion $w(z)$ die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit $2n$ logarithmischen Windungspunkten ab, von denen n über dem unendlich fernen Punkt liegen. Die angegebenen Werte von c sind auch die einzigen, für welche die Gleichung (17) eine Lösung hat, welche als Bild der schlichten z-Ebene über der w-

Ebene eine Riemannsche Fläche mit n über $w = \infty$ gelegenen logarithmischen Windungspunkten erzeugt. Da das Polynom $D^{\pm}_{h,n}(z)$ der Gleichung (56) genügt, hat es lauter einfache Nullstellen. Die Gesamtzahl der (einfachen) Nullstellen ist also gleich h. Jede einfache Nullstelle von $D^{\pm}_{h,n}(z)$ liefert aber nach (57) einen einfachen Pol von $w(z)$. Daher hat $w(z)$ insgesamt h (einfache) Pole. Zusammenfassend kann man folgenden Satz aussprechen:

Es sei h eine der Zahlen $0, 1, n, n+1, 2n, 2n+1, \ldots$ und $D^{\pm}_{h,n}(z)$ ein Polynom vom Grade h, welches der Gleichung

$$D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2hz^{n-2}D = 0 \tag{56}$$

genügt. Dann bildet die durch

$$w(z) = \int_{t_0}^{z} \frac{e^{\mp \frac{2}{n}t^n}}{(D^{\pm}_{h,n}(t))^2}\,dt \qquad (D^{\pm}_{h,n}(t_0) \neq 0) \tag{57}$$

dargestellte meromorphe Funktion $w(z)$ die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit $2n$ logarithmischen Windungspunkten ab. Von diesen $2n$ Windungspunkten liegen n über dem unendlich fernen Punkt, über welchem die Riemannsche Fläche überdies noch h schlichte Blätter besitzt.

Wenn man für $h = 0, n, 2n, \ldots$ das Polynom $D^{\pm}_{h,n}(z)$ so normiert, daß $D^{\pm}_{h,n}(0) = 1$ ist, so befriedigt für diese Werte von h die Funktion

$$w(z) = \int_{0}^{z} \frac{e^{\mp \frac{2}{n}t^n}}{(D^{\pm}_{h,n}(t))^2}\,dt$$

die Anfangsbedingungen $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, $w''(0) = 0$. Sie ist also gerade die Grundlösung von (17).

Normiert man für $h = 1, n+1, 2n+1, \ldots$ $D^{\pm}_{h,n}(z)$ so, daß seine erste Ableitung im Punkte $z = 0$ den Wert 1 annimmt, so gilt, wenn h eine der Zahlen $1, n+1, 2n+1, \ldots$ ist, für die durch (57) dargestellte meromorphe Funktion $w(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = 0$ die Laurententwicklung

$$w(z) = -\frac{1}{z} + A + z^{n-1}\,\mathfrak{P}_0(z^n)\,, \tag{58}$$

wo $\mathfrak{P}_0(z^n)$ eine Potenzreihe in z^n bezeichnet. Wir denken uns nun in (57) die untere Integrationsgrenze so gewählt, daß in dieser Laurentreihe das absolute Glied A verschwindet. Daß dies möglich ist, ist leicht einzusehen. Wenn nämlich das beliebig gewählte t_0 diese Eigenschaft noch nicht hat, so gibt es doch ein t_1 so, daß

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{e^{\mp \frac{2}{n}t^n}}{(D^{\pm}_{h,n}(t))^2}\,dt = A$$

wird [17]). Ein so gewähltes t_1 hat alsdann, wenn es an Stelle von t_0 im Integral (57) als untere Integrationsgrenze genommen wird, die gewünschte Eigenschaft. Nunmehr folgt, nachdem in (57) die untere Integrationsgrenze in der angegebenen Art festgelegt

[17]) Denn für die durch (57) dargestellte meromorphe Funktion $w(z)$ ist ein beliebiger endlicher Wert entweder kein Ausnahmewert oder, wenn er Ausnahmewert ist, so doch nur mit dem Defekt $\frac{1}{n}$. Daher nimmt diese Funktion jeden endlichen Wert (sogar unendlich oft) an. Insbesondere gilt dies also für A.

ist, aus (58):

$$-\frac{1}{w(z)} = z + z^{n+1}\,\mathfrak{P}_1(z^n)\,,$$

wo auch $\mathfrak{P}_1(z^n)$ eine Potenzreihe in z^n bedeutet. Somit ist für $h = 1, n+1, 2n+1, \ldots$ das Integral (57) gleich der negativen reziproken Grundlösung.

Wir können nun unser Ergebnis auch in folgender Weise aussprechen:

1. *Es sei* $c = \pm\,((2\mu+1)\,n - 1)$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ *und* $D^{\pm}_{\mu n,n}(z)$ *diejenige Polynomlösung der Gleichung*

$$D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2\mu n\, z^{n-2}D = 0\,,$$

welche für $z = 0$ *den Wert* 1 *annimmt. Dann wird durch*

$$w_n(z, c) = \int_0^z \frac{e^{\mp\frac{2}{n}t^n}}{(D^{\pm}_{\mu n,n}(t))^2}\,dt$$

die Grundlösung der Gleichung (17) *dargestellt. Diese bildet die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit* $2n$ *logarithmischen Windungspunkten ab. Von diesen* $2n$ *Windungspunkten kommen* n *über den unendlich fernen Punkt zu liegen, über welchem die Riemannsche Fläche überdies noch* μn *schlichte Blätter besitzt.*

2. *Es sei* $c = \pm\,((2\nu+1)\,n + 1)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *und* $D^{\pm}_{\nu n+1,n}(z)$ *diejenige Polynomlösung der Gleichung*

$$D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2(\nu n+1)\,z^{n-2}D = 0\,,$$

deren erste Ableitung für $z = 0$ *den Wert* 1 *annimmt. Dann wird durch*

$$w_n(z, c) = -\left(\int_{t_1}^z \frac{e^{\mp\frac{2}{n}t^n}}{(D^{\pm}_{\nu n+1,n}(t))^2}\,dt\right)^{-1}$$

die Grundlösung der Gleichung (17) *dargestellt, falls* t_1 *als Nichtnullstelle von* $D^{\pm}_{\nu n+1,n}(t)$ *so gewählt ist, daß in der Laurententwicklung für das in der Klammer stehende Integral das absolute Glied verschwindet. Diese Grundlösung bildet die schlichte endliche z-Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit* $2n$ *logarithmischen Windungspunkten ab. Von diesen* $2n$ *Windungspunkten kommen* n *über den Nullpunkt zu liegen, über welchem die Riemannsche Fläche überdies noch* $\nu n + 1$ *schlichte Blätter besitzt.*

Nun seien zum Schluß noch ein paar Spezialfälle angeführt:

Die Grundlösung $w_n(z, c)$ der Gleichung (17) ist im allgemeinen eine meromorphe Funktion von z mit Polen. Nur in zwei Fällen, nämlich erstens für $c = n - 1$ und zweitens für $c = -n + 1$, ist sie eine ganze Funktion von z und zwar

$$w_n(z, n-1) = \int_0^z e^{-\frac{2}{n}t^n}\,dt \text{ und } w_n(z, -n+1) = \int_0^z e^{\frac{2}{n}t^n}\,dt\,.$$

Von besonderem Interesse ist noch der Sonderfall $n = 2$. Dies ist nämlich der einzige Fall, in dem h alle natürlichen Zahlen einschließlich Null durchlaufen kann. Gleichung (56) lautet für $n = 2$:

$$(D^{\pm}_{h,2})'' \pm 2z\,(D^{\pm}_{h,2})' \mp 2h\,D^{\pm}_{h,2} = 0\,.$$

Nun befriedigt bekanntlich das h-te Hermitesche Polynom — es sei mit $H_h(z)$ bezeichnet — die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 H_h(z)}{dz^2} - 2z \frac{dH_h(z)}{dz} + 2h H_h(z) = 0 .$$

Ferner genügt, wie man sieht, das Polynom $H_h(iz)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 H_h(iz)}{dz^2} + 2z \frac{dH_h(iz)}{dz} - 2h H_h(iz) = 0 .$$

Daher ist das Polynom $D^{-}_{h,2}(z)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich dem h-ten Hermiteschen Polynom $H_h(z)$ und das Polynom $D^{+}_{h,2}(z)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Polynom $H_h(iz)$.

Eingegangen 9. September 1935.

Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik.

Von *Helmut Hasse* in Göttingen.

Im Anschluß an eine frühere Arbeit[1]) behandle ich hier die Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten über einem vollkommenen Konstantenkörper k beliebiger Charakteristik $p(=0$ oder Primzahl). Es handelt sich dabei um den Nachweis des am Schluß ausgesprochenen Satzes, der als Verallgemeinerung des Satzes 3 und der anschließenden Ausführungen in meiner früheren Arbeit anzusehen ist.

1. Es sei x irgendein Element aus K und

$$x = \sum_{\mu} a_\mu \pi^\mu, \quad \text{kurz} \quad x = x(\pi)$$

seine Entwicklung nach irgendeinem lokalen Primelement π zu irgendeinem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K mit Koeffizienten a_μ aus dem Konstantenkörper $k_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung $K_\mathfrak{p}$ von K[2]).

Für jedes feste System $\mathfrak{p}, \pi$ sind dann die formalen Ableitungen

$$\frac{d^\varkappa x}{d\pi^\varkappa} = \sum_{\mu} \mu(\mu-1)\cdots(\mu-(\varkappa-1))\, a_\mu \pi^{\mu-\varkappa}$$

zwar wohlbestimmte Elemente aus $K_\mathfrak{p}$, aber für $\varkappa \geqq p$ sämtlich 0. Um zu einer nichttrivialen Definition auch für $\varkappa \geqq p$ zu gelangen, nehmen wir das formale Äquivalent der bei $p=0$ durch $\frac{1}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa x}{d\pi^\varkappa}$ gegebenen Bildungen, also die wohlbestimmten Elemente

$$D_\pi^{(\varkappa)} x = \sum_{\mu} \binom{\mu}{\varkappa} a_\mu \pi^{\mu-\varkappa}$$

aus $K_\mathfrak{p}$.

---

[1]) H. Hasse, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934), 55—64.

[2]) Bekanntlich ist $K_\mathfrak{p}$ der Körper aller Potenzreihen in π mit Koeffizienten aus $k_\mathfrak{p}$, wobei $k_\mathfrak{p}$ auf folgende beiden Arten eindeutig charakterisiert ist:

a) $k_\mathfrak{p}$ ist die in $K_\mathfrak{p}$ algebraisch-abgeschlossene Hülle von k (lokaler Konstantenkörper).

b) $k_\mathfrak{p}$ ist eine zum Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ kongruent-isomorphe, in $K_\mathfrak{p}$ enthaltene Erweiterung von k (also vom Grade $f_\mathfrak{p}$ über k, wo $f_\mathfrak{p}$ der Grad von $\mathfrak{p}$ ist).

Zu b) siehe H. Hasse-F. K. Schmidt, Die Struktur diskret bewerteter Körper, Journ. f. Math. **170** (1933), 4—63, insbes. 9 f.

Die Gesamtheit der zu x auf diese Weise bei festem $\varkappa$ für alle $\mathfrak{p}$ und alle zugehörigen π zugeordneten Elemente $D_\pi^{(\varkappa)} x$ aus den $K_\mathfrak{p}$ nennen wir das *$\varkappa$-te Differential* $D^{(\varkappa)} x$.

Die Theorie dieser Differentiale erfordert bei $p \neq 0$ deshalb eine neue Begründung, weil dann das methodische Haupthilfsmittel der Theorie bei $p = 0$, nämlich die iterative Herleitung

$$\frac{d^{\varkappa+1} x}{d\pi^{\varkappa+1}} = \frac{d\left(\frac{d^\varkappa x}{d\pi^\varkappa}\right)}{d\pi}$$

der höheren Differentialquotienten, kein Äquivalent hat; in der Tat versagt das bei $p = 0$ bestehende formale Äquivalent

$$D_\pi^{(\varkappa+1)} x = \frac{1}{\varkappa+1} D_\pi^{(1)} D_\pi^{(\varkappa)} x$$

bei $p \neq 0$ für $\varkappa + 1 \equiv 0 \bmod p$.

Als Ersatz für dieses Hilfsmittel ziehen wir formale Potenzreihenentwicklungen in einer Unbestimmten t über den Körpern K und $K_\mathfrak{p}$ heran. Offenbar ist $D_\pi^{(\varkappa)}$ auch charakterisiert als der Koeffizient von $t^\varkappa$ in $x(\pi + t)$, man hat also die Identität

$$x(\pi + t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (D_\pi^{(\varkappa)} x)\, t^\varkappa = x + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (D_\pi^{(\varkappa)} x)\, t^\varkappa \tag{1}$$

in der Unbestimmten t.

Die Bedeutung der lokalen Differentialquotienten $D_\pi^{(\varkappa)} x$ liegt darin, daß für bei $\mathfrak{p}$ ganzes x die Koeffizienten a_μ der π-adischen Entwicklung von x selbst (ohne hinzutretende Zahlkoeffizienten) als Elemente aus $k_\mathfrak{p}$ mit

$$a_\mu \equiv D_\pi^{(\mu)} x \bmod \mathfrak{p}$$

charakterisiert sind; daher ist die Ordnungszahl eines bei $\mathfrak{p}$ ganzen x ausnahmslos charakterisiert als die Ordnung μ des frühesten Differentialquotienten $D_\pi^{(\mu)} x \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$.

2. Es sei

$$f = f(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn}\, x^m\, y^n$$

irgendein Polynom in zwei Unbestimmten x, y mit Koeffizienten a_{mn} aus k. Wir brauchen dann die folgende auch für $p \neq 0$ durchweg nicht-triviale Definition der *höheren partiellen Ableitungen*:

$$\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)} f = \sum_{m,n} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\nu} a_{mn}\, x^{m-\mu}\, y^{n-\nu},$$

die sich als formales Äquivalent von $\frac{1}{\mu!\nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu}$ ergibt. Offenbar ist $\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)} f$ auch charakterisiert als der Koeffizient von $u^\mu v^\nu$ in $f(x + u, y + v)$, man hat also die Identität

$$f(x + u, y + v) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)} f)\, u^\mu\, v^\nu \tag{2}$$

in den Unbestimmten u, v.

3. Es seien jetzt x, y irgend zwei Elemente aus K. Wir wollen dann die höheren Differentiale $D^{(\varkappa)} f$ des Elementes $f = f(x, y)$ aus K durch die höheren Differentiale $D^{(r)} x$, $D^{(s)} y$ von x, y ausdrücken.

Nach (1) und (2) haben wir

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(D_\pi^{(\varkappa)}f)\,t^\varkappa = f(x(\pi+t),\,y(\pi+t))$$
$$= f\Big(x+\sum_{r=1}^{\infty}(D_\pi^{(r)}x)\,t^r,\;\; y+\sum_{s=1}^{\infty}(D_\pi^{(s)}y)\,t^s\Big)$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D_\pi^{(r)}x)\,t^r\Big)^\mu\Big(\sum_{s=1}^{\infty}(D_\pi^{(s)}y)\,t^s\Big)^\nu.$$

Mit dieser verhältnismäßig einfachen Identität, die wir unter Offenlassen der Wahl von $\mathfrak{p}, \pi$ kurz in der Form

$$(3)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(D^{(\varkappa)}f)\,t^\varkappa = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r\Big)^\mu\Big(\sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^s\Big)^\nu$$

schreiben, werden wir für unsere Zwecke auskommen. Wir brauchen nicht die daraus durch Koeffizientenvergleich in t folgenden komplizierteren expliziten Formeln

$$(3')\quad D^{(\varkappa)}f = \sum_{\substack{\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\sigma_1,\sigma_2,\ldots=0\\ \varrho_1+2\varrho_2+\cdots+\sigma_1+2\sigma_2+\cdots=\varkappa}} (\Delta_{\varrho_1+\varrho_2+\cdots,\;\sigma_1+\sigma_2+\cdots}^{(\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\sigma_1+\sigma_2+\cdots)}f)\binom{\varrho_1+\varrho_2+\cdots}{\varrho_1,\,\varrho_2,\ldots}\binom{\sigma_1+\sigma_2+\cdots}{\sigma_1,\,\sigma_2,\ldots}$$
$$(D^{(1)}x)^{\varrho_1}(D^{(2)}x)^{\varrho_2}\cdots(D^{(1)}y)^{\sigma_1}(D^{(2)}y)^{\sigma_2}\cdots.$$

4. Es sei jetzt x speziell ein solches Element aus K, daß K separabel-algebraisch über $k(x)$ ist — wegen der Vollkommenheit von k gibt es ein solches Element —, und y irgendein Element aus K. Dann existiert ein in y separables Polynom f mit

$$f(x,y)=0.$$

Für dieses Polynom ergibt (3) das Bestehen der Identität

$$(4)\qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r\Big)^\mu\Big(\sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^s\Big)^\nu = 0$$

in der Unbestimmten t, also der (3′) entsprechenden Formeln

$$(4')\quad \sum_{\substack{\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\sigma_1,\sigma_2,\ldots=0\\ \varrho_1+2\varrho_2+\cdots+\sigma_1+2\sigma_2+\cdots=\varkappa}} (\Delta_{\varrho_1+\varrho_2+\cdots,\;\sigma_1+\sigma_2+\cdots}^{(\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\sigma_1+\sigma_2+\cdots)}f)\binom{\varrho_1+\varrho_2+\cdots}{\varrho_1,\,\varrho_2,\ldots}\binom{\sigma_1+\sigma_2+\cdots}{\sigma_1,\,\sigma_2,\ldots}(D^{(1)}x)^{\varrho_1}(D^{(2)}x)^{\varrho_2}\cdots(D^{(1)}y)^{\sigma_1}(D^{(2)}y)^{\sigma_2}\cdots = 0.$$

Dabei ist nach Voraussetzung

$$\Delta_{0,0}^{(0)}f = f = 0\,,$$
$$\Delta_{0,1}^{(1)}f = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\,.$$

Bekanntlich hat daher die Gleichung

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\,u^\mu v^\nu = 0$$

eine eindeutig bestimmte Auflösung

$$v=\sum_{\mu=1}^{\infty}(D_x^{(\mu)}y)\,u^\mu$$

mit rational aus den $\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}$ gebildeten Koeffizienten $D_x^{(\mu)}y$, deren Nenner sogar nur Potenzen von $\Delta_{0,1}^{(1)}f=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sind; die Bezeichnung ist aus einem später hervortretenden Grunde gewählt. Aus (4) folgt damit das Bestehen der Identität

$$(5)\qquad \sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^s = \sum_{\mu=1}^{\infty}(D_x^{(\mu)}y)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r\Big)^\mu,$$

und daraus ergeben sich durch Koeffizientenvergleich in t die expliziten Formeln

$$(5') \quad D^{(\varkappa)}y = \sum_{\substack{\varrho_1,\ldots,\varrho_\varkappa=0 \\ \varrho_1+\cdots+\varkappa\varrho_\varkappa=\varkappa}}^{\varkappa} (D_x^{(\varrho_1+\cdots+\varrho_\varkappa)}y)\binom{\varrho_1+\cdots+\varrho_\varkappa}{\varrho_1,\ldots,\varrho_\varkappa}(D^{(1)}x)^{\varrho_1}\cdots(D^{(\varkappa)}x)^{\varrho_\varkappa},$$

welche die Auflösung des Formelsystems (4′) nach den $D^{(\varkappa)}y$ darstellen.

Wir brauchen im folgenden nur, daß diese Formeln die folgende dreieckige Struktur haben:

$$(5'') \qquad D^{(\varkappa)}y = (D_x^{(\varkappa)}y)\,(dx)^\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(D_x^{(\lambda)}y)\,X^{(\varkappa,\lambda)},$$

wo $dx = D^{(1)}x$ und die $X^{(\varkappa,\lambda)}$ gewisse ganzzahlige Polynome in $D^{(1)}x, \ldots, D^{(\varkappa)}x$ sind, auf die es uns nicht weiter ankommt. Aus (5″) ist ersichtlich, daß die Koeffizienten $D_x^{(\varkappa)}y$, wie schon durch die Bezeichnung angedeutet, von der Wahl des annullierenden Polynoms f zu x, y unabhängig sind; man braucht dazu (5″) nur für irgendein festes System $\mathfrak{p}, \pi$ anzusetzen und die Unabhängigkeit der $D_\pi^{(\varkappa)}x$, $D_\pi^{(\varkappa)}y$ von f zu beachten.

5. Beiläufig sei noch folgendes bemerkt: Ist x' ein weiteres Element aus K, für das K separabel-algebraisch über $k(x')$ ist, so kann man neben der direkten Darstellung (5) der $D^{(\varkappa)}y$ durch die $D^{(\varkappa)}x$ auch den Umweg über x' nehmen, d. h. in der Identität

$$\sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^s = \sum_{\lambda=1}^{\infty}(D_{x'}^{(\lambda)}y)\Big(\sum_{q=1}^{\infty}(D^{(q)}x')\,t^q\Big)^\lambda$$

rechts die Identität

$$\sum_{q=1}^{\infty}(D^{(q)}x')\,t^q = \sum_{\nu=1}^{\infty}(D_x^{(\nu)}x')\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r\Big)^\nu$$

einführen. Koeffizientenvergleich in $\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r$ als Entwicklungsgröße liefert dann genau nach dem Schema des von (5) zu (5′) führenden Koeffizientenvergleichs die ganz entsprechend gebauten Formeln

$$D_x^{(\varkappa)}y = \sum_{\substack{\varrho_1,\ldots,\varrho_\varkappa=0 \\ \varrho_1+\cdots+\varkappa\varrho_\varkappa=\varkappa}}^{\varkappa}(D_{x'}^{(\varrho_1+\cdots+\varrho_\varkappa)}y)\binom{\varrho_1+\cdots+\varrho_\varkappa}{\varrho_1,\ldots,\varrho_\varkappa}(D_x^{(1)}x')^{\varrho_1}\cdots(D_x^{(\varkappa)}x')^{\varrho_\varkappa} = (D_{x'}^{(\varkappa)}y)\Big(\frac{dx'}{dx}\Big)^\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa}(D_{x'}^{(\lambda)}y)\,X_x^{\prime(\varkappa,\lambda)}$$

welche die Transformationsregel der Bildungen $D_x^{(\varkappa)}y$ bei Übergang von der Differentiationsgröße x zu x' darstellen.

Die $D_x^{(\varkappa)}y$ sind nach (5′) und diesen Formeln das formale Äquivalent der höheren Differentialquotienten $\dfrac{1}{\varkappa!}\dfrac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa}$ in ihrer Darstellung durch die höheren partiellen Ableitungen von f.

6. Es seien jetzt irgendwelche n Elemente $y_1, \ldots, y_n$ aus K gegeben. Wir betrachten die Determinante

$$|D^{(\varkappa)}y_i| = \begin{vmatrix} D^{(1)}y_1 & \cdots & D^{(n)}y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D^{(1)}y_n & \cdots & D^{(n)}y_n \end{vmatrix} \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n).$$

Sie liefert für jedes System $\mathfrak{p}, \pi$ ein wohlbestimmtes Element $|D_\pi^{(\varkappa)}y_i|$ aus $K_\mathfrak{p}$. Aus der dreieckigen Struktur der Formeln (5″) ergibt sich ohne weiteres, daß bei der Bildung dieser Determinante die dortigen Zusatzglieder mit den $X^{(\varkappa,\lambda)}$ weggelassen werden

können, also

$$|D_\pi^{(\varkappa)} y_i| = \left| (D_x^{(\varkappa)} y_i) \left(\frac{dx}{d\pi}\right)^\varkappa \right| = |D_x^{(\varkappa)} y_i| \left(\frac{dx}{d\pi}\right)^{1+\cdots+n}.$$

Dabei ist die Determinante $|D_x^{(\varkappa)} y_i|$ ein durch x und $y_1, \ldots, y_n$ wohlbestimmtes, von der Wahl des Systems $\mathfrak{p}, \pi$ unabhängiges Element aus K. Wir schreiben unter Offenlassung der Wahl von $\mathfrak{p}, \pi$ dafür auch wieder kurz

$$|D^{(\varkappa)} y_i| = |D_x^{(\varkappa)} y_i| \, (dx)^{1+\cdots+n}.$$

Zusammenfassend haben wir damit festgestellt:

Satz. *Ist x irgendein Element aus K derart, daß K über $k(x)$ separabel-algebraisch ist, d. h. irgendein Element aus K mit $dx \neq 0$, und sind $y_1, \ldots, y_n$ irgendwelche Elemente aus K, so ist*

$$\frac{|D^{(\varkappa)} y_i|}{(dx)^{1+\cdots+n}} = |D_x^{(\varkappa)} y_i| \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n)$$

ein wohlbestimmtes Element aus K.

Insbesondere stellt $|D^{(\varkappa)} y_i|$ selbst einen wohlbestimmten Divisor aus der $(1+2+\cdots+n)$-ten Potenz der Differentialklasse von K dar, der gegenüber nicht-singulärer Transformation aus k des Systems y_i invariant ist.

Entsprechendes gilt ersichtlich auch für die Determinante

$$|D^{(\varkappa)} y_i| \quad (i = 1, \ldots, n;\ \varkappa = 0, \ldots, n-1),$$

bei der dann die Potenz $(dx)^{1+\cdots+(n-1)}$ zu nehmen ist.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen hat Herr Teichmüller eine andersartige Begründung der höheren Differentation in K für den Fall einer Primzahlcharakteristik p gegeben, die ohne den Umweg über die lokalen Differentialquotienten $D_\pi^{(\varkappa)} y$ direkt zu den Differentialquotienten $D_x^{(\varkappa)} y$ im großen führt. Eine Darstellung dieser Begründung wird demnächst in diesem Journal erscheinen.

Eingegangen 15. Oktober 1935.

Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I.
Die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung.

Von *Helmut Hasse* in Göttingen.

In meiner der Riemannschen Vermutung für einen elliptischen Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper gewidmeten Arbeit [1]) habe ich eine ausführliche Darstellung dieses Gegenstandes in diesem Journal in Aussicht gestellt. Es ist mir inzwischen gelungen, den Aufbau der ganzen Theorie und insbesondere den Beweis der Riemannschen Vermutung ganz erheblich zu vereinfachen. Eine vorläufige Mitteilung darüber habe ich in den Göttinger Nachrichten 1935 erscheinen lassen. Ich gebe hier die in Aussicht gestellte ausführliche Darstellung.

Mit Hinblick auf die Aufgabe der Verallgemeinerung der ganzen Theorie auf beliebiges Geschlecht g vermeide ich es absichtlich, soweit nur irgend möglich, spezielle explizite Formeln oder Kenntnisse über elliptische Körper auszunutzen, selbst wenn dadurch die Beweise für den nur am elliptischen Fall Interessierten reichlich abstrakt erscheinen. Als vorläufig ausreichender Prüfstein für die anzustrebende Verallgemeinerungsfähigkeit hat mir die durchgängige zwanglose Einbeziehung des Falles der Charakteristik $p = 2$ gedient, den ich früher wegen der Abweichungen in der Erzeugung durch eine Normalform ausschließen mußte. Insbesondere brauche ich nirgends auf die expliziten Formeln des Additionstheorems zurückzugreifen, sondern komme mit dessen impliziter Darstellung durch eine Determinantenrelation sowie mit seiner Verankerung in der Multiplikation der Divisorenklassen aus. Der ganze Aufbau der Theorie hat jetzt rein strukturellen Charakter. Es werden keinerlei sogenannte Abschätzungen mehr vorgenommen. Auch fällt die Anwendung des Dirichletschen Einheitensatzes fort. In meiner vorläufigen Mitteilung trat an seine Stelle der Struktursatz von Ostrowski über archimedisch bewertete Körper. In einer daran anschließenden Note ist es Herrn Behrbohm gelungen, ohne diesen Struktursatz auszukommen. Durch seinen Beweis, den ich mit formalen Vereinfachungen durch Herrn Teichmüller hier aufnehmen werde, wird auch der letzte Rest des transzendenten Grenzwertbegriffs beseitigt; der gesamte Aufbau der Theorie hat nunmehr formal-algebraischen Charakter.

Ich beginne in diesem Teil I mit einem neuen Beweis des Satzes über die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung. An Stelle des früher für diesen Beweis benutzten induktiven Verfahrens, verwende ich hier eine Schlußweise, die aus der Theroie der Weierstraßpunkte geläufig ist, nämlich die Betrachtung von Differential-

---

[1]) H. Hasse, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), 325—348.

determinanten. Dabei stütze ich mich auf die in der vorstehenden Arbeit frei von Charakteristikeinschränkungen entwickelte Theorie der höheren Differentiale.

Das früher in diesem Beweis benutzte induktive Verfahren werde ich später in verallgemeinerter Form zur Herleitung der grundlegenden Normenidentität im Meromorphismenring entwickeln. Ich übersehe im Augenblick noch nicht, ob sich der in diesem ersten Teil gegebene mehr rechnerische Beweis nicht vielleicht doch ganz erübrigen läßt, vorläufig jedenfalls kann ich seine Vorwegnahme für gewisse Schlüsse in den folgenden Teilen nicht entbehren.

In einem weiteren Teil II werde ich die Theorie der Automorphismen und Meromorphismen, sowie das Additionstheorem entwickeln, und in einem letzten Teil III dann die Struktur des Meromorphismenrings untersuchen und die Riemannsche Vermutung beweisen.

1. Es handelt sich hier um den Beweis des folgenden Satzes:

Sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht 1 *über einem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl).*

Für die Anzahl h_n der Divisorenklassen C von K mit $C^n = 1$ gilt dann:

$$(1) \qquad h_n = n^2, \quad \text{wenn} \quad n \not\equiv 0 \bmod. p;$$

$$(2) \qquad \left.\begin{matrix} h_n = n\,, & \text{wenn} & n = p^\nu & \text{und} & A \neq 0 \\ h_n = 1\,, & \text{wenn} & n = p^\nu & \text{und} & A = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (p \neq 0).$$

Dabei ist A folgendermaßen erklärt: Ist $\mathfrak{p}$ irgendein Primdivisor von K und π ein (lokales) Primelement zu $\mathfrak{p}$, so gilt für das bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte ganze Multiplum v von $\frac{1}{\mathfrak{p}^p}$ mit

$$v \equiv \frac{1}{\pi^p} \bmod. \frac{1}{\mathfrak{p}}$$

genauer

$$v \equiv \frac{1}{\pi^p} - \frac{A}{\pi} \bmod. \mathfrak{p}^0$$

mit A in k. Wie an anderer Stelle [2]) gezeigt wurde, ist die Klasse von A im Sinne der

---

[2]) Siehe dazu: 1. H. Hasse, Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p, Journ. f. Math. **172** (1934), 77—85. 2. H. Hasse—E. Witt, Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p; erscheint demnächst in den Monatsh. f. Math. u. Phys. (Wirtinger-Festschr.).

Der in der letzteren Arbeit für beliebiges Geschlecht g gegebene Invarianzbeweis für die entsprechende g-reihige Matrix A bei Transformationen $\bar{A} = SAS^{-p}$ (S regulär, in k) stellt sich im hier vorliegenden Spezialfall $g = 1$ einfach so dar: Ist w das wesentlich einzige ganze Multiplum von $\frac{1}{\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}}$ ($\bar{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}$) mit

$$w \equiv \frac{1}{\pi} \bmod. \mathfrak{p}^0\,,$$

so ist

$$w \equiv -\frac{S}{\bar{\pi}} \bmod. \bar{\mathfrak{p}}^0$$

mit $S \neq 0$ aus k. Dann ist

$$\bar{v} = (v - w^p + Aw)\, S^{-p}$$

Transformationen $\bar{A} = A\,S^{1-p}$ ($S \neq 0$, in k), also die Alternative $A \neq 0$ oder $A = 0$ von der Wahl von $\mathfrak{p}, \pi$ unabhängig, also eine Invariante von K.

Durch den obigen Satz wird ersichtlich die Struktur der Gruppe aller Divisorenklassen endlicher Ordnung von K vollständig beschrieben; für den Fall, daß k der absolut-algebraische algebraisch-abgeschlossene Körper der Primzahlcharakteristik p ist, ist damit die Struktur der Gruppe aller Divisorenklassen nullten Grades, und dann natürlich auch der Gruppe aller Divisorenklassen von K überhaupt bestimmt.

2. Zum Beweis des Satzes sei $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Primdivisor von K. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist für jede Divisorenklasse C nullten Grades von K $\dim C(\mathfrak{o}) = 1$, also C durch einen Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ eindeutig repräsentierbar; umgekehrt repräsentiert natürlich jeder solche Quotient $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ eine Divisorenklasse C nullten Grades. Die C mit $C^n = 1$ entsprechen dabei umkehrbar eindeutig den $\mathfrak{p}$ mit $\frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{o}^n} \sim 1$, für die also $\frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{o}^n} \cong y$ ein Element aus K ist.

Um diese $\mathfrak{p}$, soweit $\neq \mathfrak{o}$, zu charakterisieren, wählen wir eine Basis $y_0 = 1, y_1, \ldots, y_{n-1}$ der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{o}^n}$ in K; es ist ja $\dim(\mathfrak{o}^n) = n$. Ein nicht-konstantes ganzes Multiplum

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1} \quad \begin{pmatrix} c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \text{ in } k \\ c_1, \ldots, c_{n-1} \text{ nicht alle } 0 \end{pmatrix}$$

von $\frac{1}{\mathfrak{o}^n}$ ist dann und nur dann von der Form $y \cong \frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{o}^n}$, wenn ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K derart existiert, daß für die lokalen Differentialquotienten

$$D_\pi^{(\varkappa)} y \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, n-1)$$

gilt; dabei bezeichnet π irgendein lokales Primelement zu $\mathfrak{p}$. Die fraglichen $\mathfrak{p}$ sind daher dadurch charakterisiert, daß für sie das Kongruenzensystem

$$D_\pi^{(\varkappa)} y = \sum_{i=0}^{n-1} c_i D_\pi^{(\varkappa)} y_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, n-1)$$

eine Lösung $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ in k mit nicht sämtlich verschwindenden $c_1, \ldots, c_{n-1}$ hat. Wegen $y_0 = 1$, also $D_\pi^{(0)} y_0 = 1, D_\pi^{(1)} y_0, \ldots, D_\pi^{(n-1)} y_0 = 0$ ist dafür notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$|D_\pi^{(\varkappa)} y_i| \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n-1).$$

Nach dem in der vorstehenden Arbeit bewiesenen Satz ist nun

$$\mathfrak{d}_n \cong |D^{(\varkappa)} y_i| \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n-1)$$

---

das wesentlich einzige ganze Multiplum von $\frac{1}{\bar{\mathfrak{p}}^p}$ mit

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{\bar{\pi}^p} \bmod \frac{1}{\bar{\mathfrak{p}}},$$

und es ist

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{\bar{\pi}^p} - \frac{A S^{1-p}}{\bar{\pi}} \bmod \bar{\mathfrak{p}}^0.$$

ein von der Wahl der Basis unabhängiger Divisor aus der $(1 + \cdots + (n-1))$-ten Potenz der Differentialklasse von K. Damit haben wir:

I. *Die Primdivisoren* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ *von* K *mit* $\frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{o}^n} \sim 1$ *sind genau die Zählerprimteiler des Differentialdivisors*

$$\mathfrak{d}_n \cong |D^{(\varkappa)} y_i| \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n-1)$$

von K, *wo die* y_i *eine Basis der nicht-konstanten ganzen Multipla von* $\frac{1}{\mathfrak{o}^n}$ *in* K *sind.*

Die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{p}$ ergibt sich hiernach, wenn man zum Ausdruck bringt, daß $\mathfrak{d}_n$ den Grad 0 hat, weil die Differentialklasse von K den Grad 0 hat, und wenn man beachtet, daß der Nenner von $\mathfrak{d}_n$ nur eine Potenz von $\mathfrak{o}$ ist, weil die y_i, also auch die $D^{(\varkappa)} y_i$ diese Eigenschaft haben.

3. Unsere Behauptungen (1) und (2) werden auf Grund von I und der anschließenden Bemerkungen bewiesen sein, wenn folgendes gezeigt ist:

II 1. *Ist* $n \not\equiv 0$ *mod.* p, *so ist*

$$\mathfrak{d}_n = \frac{\mathfrak{z}_n}{\mathfrak{o}^{n^2-1}}$$

mit einem ganzen durch $\mathfrak{o}$ *nicht teilbaren Divisor* $\mathfrak{z}_n$, *der jeden seiner Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ *genau zur Potenz* $\mathfrak{p}^1$ *enthält.*

Die $n^2 - 1$ verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{z}_n$ bilden dann mit $\mathfrak{o}$ zusammen das volle System der Lösungen von $\frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{o}^n} \sim 1$.

II 2. *Ist* $n = p^\nu$ $(p \neq 0)$, *so ist für* $A \neq 0$

$$\mathfrak{d}_{p^\nu} = \frac{\mathfrak{z}_{p^\nu}}{\mathfrak{o}^{(p^\nu-1)p^\nu}}$$

mit einem ganzen durch $\mathfrak{o}$ *nicht teilbaren Divisor* $\mathfrak{z}_{p^\nu}$, *der jeden seiner Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ *genau zur Potenz* $\mathfrak{p}^{p^\nu}$ *enthält.*

Für $A = 0$ *ist der Nenner von* $\mathfrak{d}_{p^\nu}$ *niedriger als* $\mathfrak{o}^{(p^\nu-1)p^\nu}$, *und etwaige Zählerbeiträge von* $\mathfrak{d}_{p^\nu}$ *wären höher als* $\mathfrak{p}^{p^\nu}$.

Für $A \neq 0$ bilden dann die $p^\nu - 1$ verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{z}_{p^\nu}$ mit $\mathfrak{o}$ zusammen das volle System der Lösungen von $\frac{\mathfrak{p}^{p^\nu}}{\mathfrak{o}^{p^\nu}} \sim 1$.

Für $A = 0$ folgt, daß in Wahrheit $\mathfrak{d}_{p^\nu} = 1$ ist. Denn die Gradbilanz ergibt jedenfalls $h_{p^\nu} - 1 < p^\nu - 1$; wegen der gruppentheoretischen Bedeutung der h_{p^ν} folgt daraus speziell $h_p = 1$, also erst recht $h_{p^\nu} = 1$. Man beachte für die Gradbilanz, daß auch hier jedenfalls $\mathfrak{d}_{p^\nu} \neq 0$ ist, was in den anderen Fällen aus der Endlichkeit der Zählerbeiträge folgte. Wäre nämlich $\mathfrak{d}_{p^\nu} = 0$, so gälte nach I $\frac{\mathfrak{p}^{p^\nu}}{\mathfrak{o}^{p^\nu}} \sim 1$ für alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, im Widerspruch zu der nach II 1 bereits feststehenden Existenz von Primdivisoren $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ mit $\frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{o}^n} \sim 1$ für irgendein zu p primes n.

4. Zum Beweise von II 1 und II 2 gehen wir nach dem Muster der Theorie der Weierstraßpunkte vor [3]).

---

[3]) Siehe etwa Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902, 489 ff.

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primdivisor von K und π ein zugehöriges lokales Primelement, so existiert eine für $\mathfrak{p}$, π normierte Basis y_i der nicht-konstanten ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{o}^n}$, nämlich derart, daß die π-adischen Entwicklungen der y_i folgendermaßen beginnen:

$$y_i = \pi^{\nu_i} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

mit eindeutig bestimmten Exponenten

$$\nu_1 < \cdots < \nu_{n-1}\,.$$

Dann ist

$$D_\pi^{(\varkappa)} y_i = \binom{\nu_i}{\varkappa} \pi^{\nu_i - \varkappa} + \cdots,$$

und demnach

$$|D_\pi^{(\varkappa)} y_i| = \left|\binom{\nu_i}{\varkappa}\right| \pi^{\Sigma\nu_i - \Sigma\varkappa} + \cdots \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n-1)$$

der Beginn der π-adischen Entwicklung der Determinante $|D_\pi^{(\varkappa)} y_i|$. Für die hier als Anfangskoeffizient auftretende Zahldeterminante ergibt sich ohne weiteres

$$\left|\binom{\nu_i}{\varkappa}\right| = \prod_i \frac{\nu_i}{i} \cdot \prod_{j>i} \frac{\nu_j - \nu_i}{j - i}\,.$$

a) Der Nenner von $\mathfrak{d}_n$ ($\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, $\pi = \omega$).

Die Dimensionsrelationen

$$\dim(\mathfrak{o}^i) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ i & (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

ergeben das Exponentensystem

$$(\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) = (-n, \ldots, -2), \text{ also } \nu_i = -n + i - 1.$$

Dafür ist

$$\Sigma\nu_i - \Sigma\varkappa = -(n^2 - 1), \quad \left|\binom{\nu_i}{\varkappa}\right| = (-1)^{n-1} n\,,$$

und somit

$$|D_\omega^{(\varkappa)} y_i| = (-1)^{n-1} n\, \omega^{-(n^2-1)} + \cdots.$$

Für $n \not\equiv 0 \bmod p$ ergibt das die Nennerbehauptung in II 1.

Für $n = p^\nu$ normieren wir $y_1 = \omega^{-p^\nu} + \cdots$ noch genauer. Sei w gemäß der Definition von A ein ganzes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{o}^p}$ mit

$$w = \omega^{-p} - A\omega^{-1} + \cdots.$$

Dann hat das ganze Multiplum

$$w^{(\nu)} = w^{p^{\nu-1}} + A^{p^{\nu-1}} w^{p^{\nu-2}} + \cdots + A^{p^{\nu-1}+\cdots+p} w$$

von $\frac{1}{\mathfrak{o}^{p^\nu}}$ die Eigenschaft

$$w^{(\nu)} = \omega^{-p^\nu} - A^{(\nu)} \omega^{-1} + \cdots,$$

wo zur Abkürzung

$$A^{(\nu)} = A^{p^{\nu-1}+\cdots+p+1}$$

gesetzt ist. $w^{(\nu)}$ ist also als erstes Basiselement y_1 geeignet.

Dann ist

$$D_\omega^{(\varkappa)} y_1 = \binom{-p^\nu}{\varkappa} \omega^{-p^\nu-\varkappa} - A^{(\nu)} \binom{-1}{\varkappa} \omega^{-1-\varkappa} + \cdots$$
$$= -A^{(\nu)} \binom{-1}{\varkappa} \omega^{-1-\varkappa} + \cdots,$$

weil nach dem Hilfssatz 1 am Schluß (Nr. 6)

$$\binom{-p^\nu}{\varkappa} = (-1)^\varkappa \binom{p^\nu - 1 + \varkappa}{\varkappa} \equiv 0 \bmod p \qquad (\varkappa = 1, \ldots, p^\nu - 1)$$

gilt.

Hiernach treten für die Berechnung der ω-adischen Entwicklung der Determinante $|D^{(\varkappa)} y_i|$ nur folgende einfachen Änderungen ein: $\nu_1 = -p^\nu$ ist durch -1 zu ersetzen (dementsprechend erste Zeile an den Schluß) und der Koeffizient $A^{(\nu)}$ ist herauszuziehen. Man erhält so

$$|D_\omega^{(\varkappa)} y_i| = A^{(\nu)} \left| \binom{i - p^\nu}{\varkappa} \right| \omega^{-(p^{2\nu}-p^\nu)} + \cdots \qquad (i, \varkappa = 1, \cdots, p^\nu - 1)$$
$$= A^{(\nu)} \omega^{-(p^\nu-1)p^\nu} + \cdots.$$

Das ergibt die Nennerbehauptung in II 2.

b) Der Zähler von $\mathfrak{d}_n$ ($\mathfrak{p}^n \sim \mathfrak{o}^n$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$).

Die Dimensionsrelationen

$$\dim \left(\frac{\mathfrak{o}^n}{\mathfrak{p}^i}\right) = \begin{cases} n - i & (i = 0, \ldots, n-1) \\ 1 & (i = n) \end{cases}$$

ergeben das Exponentensystem

$$(\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) = (1, \ldots, n-2, n), \text{ also } \nu_i = \begin{cases} i & (i = 1, \ldots, n-2) \\ n & (i = n-1) \end{cases}.$$

Dafür ist

$$\Sigma \nu_i - \Sigma \varkappa = 1, \qquad \left| \binom{\nu_i}{\varkappa} \right| = n,$$

und somit

$$|D_\pi^{(\varkappa)} y_i| = n\pi + \cdots.$$

Für $n \not\equiv 0 \bmod p$ ergibt das die Zählerbehauptung in II 1.

Für $n = p^\nu$ müssen wir die Berechnung der π-adischen Entwicklung der Determinante $|D^{(\varkappa)} y_i|$ genauer anlegen. Wir können die ersten $p^\nu - 2$ Basiselemente y_i genauer so normieren:

$$y_i = \pi^i + b_i \pi^{p^\nu - 1} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, p^\nu - 2)$$

mit gewissen b_i aus k. Ferner sei genauer

$$y_{p^\nu-1} = \pi^{p^\nu} + \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-1} c_\lambda \pi^{p^\nu+\lambda} + \cdots$$

mit gewissen c_λ aus k.

Dann ist

$$D_\pi^{(\varkappa)} y_i = \binom{i}{\varkappa} \pi^{i-\varkappa} + b_i \binom{p^\nu - 1}{\varkappa} \pi^{p^\nu-1-\varkappa} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, p^\nu - 2),$$

$$D_\pi^{(\varkappa)} y_{p^\nu-1} = \binom{p^\nu}{\varkappa} \pi^{p^\nu-\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-1} c_\lambda \binom{p^\nu + \lambda}{\varkappa} \pi^{p^\nu+\lambda-\varkappa} + \cdots.$$

Weil nun natürlich

$$\binom{i}{\varkappa} = \begin{Bmatrix} 0 & (i < \varkappa) \\ 1 & (i = \varkappa) \end{Bmatrix}$$

und nach den Hilfssätzen 1, 2 am Schluß (Nr. 6)

$$\binom{p^\nu + \lambda}{\varkappa} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \bmod. p & (0 \leqq \lambda < \varkappa) \\ 1 \bmod. p & (\lambda = \varkappa) \end{Bmatrix} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, p^\nu - 1)$$

gilt, ist die Matrix

$$(D_\pi^{(\varkappa)} y_i) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{p^\nu-2} \\ c_1\pi^{p^\nu} & \cdots & c_{p^\nu-2}\pi^{p^\nu} & & c_{p^\nu-1}\pi^{p^\nu} \end{pmatrix} \bmod. \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ \vdots \\ \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{p^\nu} \end{pmatrix},$$

also ihre Determinante

$$|D_\pi^{(\varkappa)} y_i| = (c_{p^\nu-1} - \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-2} b_\lambda c_\lambda)\, \pi^{p^\nu} + \cdots .$$

Das ergibt die Zählerbehauptung in II 2 auf Grund des jetzt noch zu erbringenden Nachweises, daß

$$c_{p^\nu-1} - \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-2} b_\lambda c_\lambda = A^{(\nu)}$$

in der schon früher auftretenden Bedeutung ist.

5. Um diesen letzteren Nachweis zu erbringen, sei $v^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{p}$ entsprechend erklärt, wie oben $w^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{o}$. Wegen der Invarianz von A ist also $v^{(\nu)}$ ein ganzes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{p}^{p^\nu}}$ mit

$$v^{(\nu)} = \frac{1}{\pi^{p^\nu}} - \frac{A^{(\nu)}}{\pi} + \cdots .$$

Wegen $y_{p^\nu-1} \cong \frac{\mathfrak{p}^{p^\nu}}{\mathfrak{o}^{p^\nu}}$ ist dann $y_{p^\nu-1} v^{(\nu)}$ ein ganzes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{o}^{p^\nu}}$; seine π-adische Entwicklung beginnt so:

$$y_{p^\nu-1} v^{(\nu)} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-2} c_\lambda \pi^\lambda + (c_{p^\nu-1} - A^{(\nu)})\pi^{p^\nu-1} + \cdots .$$

Daraus folgt

$$y_{p^\nu-1} v^{(\nu)} - \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-2} c_\lambda y_\lambda = (c_{p^\nu-1} - A^{(\nu)} - \sum_{\lambda=1}^{p^\nu-2} c_\lambda b_\lambda)\, \pi^{p^\nu-1} + \cdots .$$

Das Element links ist hiernach ein ganzes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{o}^{p^\nu}}$ mit durch $\mathfrak{p}^{p^\nu-1}$ teilbarem Zähler. Wegen $\dim\left(\frac{\mathfrak{o}^{p^\nu}}{\mathfrak{p}^{p^\nu-1}}\right) = \dim\left(\frac{\mathfrak{o}^{p^\nu}}{\mathfrak{p}^{p^\nu}}\right) = 1$ für einen Zählerprimteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{d}_{p^\nu}$ ist dann der Zähler sogar durch $\mathfrak{p}^{p^\nu}$ teilbar, d. h. die Klammer rechts ist gleich 0. Das ist die noch zu beweisende Behauptung.

6. *Hilfssätze über Binomialkoeffizienten.*

Hilfssatz 1. $\binom{i+k}{k} = \frac{(i+k)!}{i!\,k!} \equiv 0 \bmod. p$ für $i + k \geqq p^\nu$; $i, k = 1, \ldots, p^\nu - 1$.

Beweis. Bekanntlich ist der Exponent der genauen Potenz von p in $n!$ gleich $\sum_{\varrho \geqq 1} \left[\frac{n}{p^\varrho}\right]$. Daher ist der Exponent der genauen Potenz von p in $\binom{i+k}{k}$ gleich

$$\sum_{\varrho \geqq 1} \left(\left[\frac{i+k}{p^\varrho}\right] - \left[\frac{i}{p^\varrho}\right] - \left[\frac{k}{p^\varrho}\right] \right).$$

Für jedes ϱ ist der Beitrag zu dieser Summe $\geqq 0$. Unter den gemachten Voraussetzungen über i, k liefert $\varrho = \nu$ einen Beitrag > 0.

Hilfssatz 2. $\binom{p^\nu + k}{k} \equiv 1 \bmod. p$ für $k = 1, \ldots, p^\nu - 1$.

Beweis.

$$\binom{p^\nu + k}{k} = \left(1 + \frac{p^\nu}{1}\right) \cdots \left(1 + \frac{p^\nu}{k}\right).$$

Eingegangen 16. Oktober 1935.

Über den Hauptsatz der Algebrentheorie.

Von *Max Deuring* in Leipzig.

Nach Hasse [1]) können die normalen einfachen Algebren $\mathfrak{A}$ über einem algebraischen Zahlkörper k durch ihre $\mathfrak{p}$-Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ beschrieben werden. $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ ist dabei eine Restklasse modulo 1, und es gilt:

(1) nur endliche viele $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ sind $\not\equiv 0 \pmod 1$,

(2) für unendliches $\mathfrak{p}$ ist $2\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$,

(3) $\sum \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$.

Dies ist die eine Hälfte des Hauptsatzes. Die andere Hälfte ist die Umkehrung: daß auch jedes (1), (2), (3) erfüllende System von Resten $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ modulo 1 als Invariantensystem einer Algebra $\mathfrak{A}$ vorkommt.

Die Summenrelation (3) steht nach Hasse in engem Zusammenhang mit dem Reziprozitätsgesetz. Es ist der Zweck dieser Zeilen, auch die Umkehrung, die eben formuliert wurde, mit dem Reziprozitätsgesetz in Zusammenhang zu bringen und sie auf rein arithmetischem Wege aus ihm herzuleiten. Der Beweis von Hasse macht von dem Satz von der arithmetischen Progression in seiner allgemeinsten Form wesentliche Anwendung; der hier zu gebende neue Beweis ergänzt darum den von Chevalley gegebenen rein arithmetischen Aufbau der Klassenkörpertheorie [2]). Zudem vertieft er die Einsicht in den Zusammenhang zwischen Klassenkörper- und Algebrentheorie.

K sei ein zyklischer Erweiterungskörper von k, $\mathfrak{f}$ der Führer von K/k. Bedeutet α den Strahl modulo $\mathfrak{f}$ von k, $\mathfrak{A}$ die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale von K und $N_{K/k}$ die Normbildung von K nach k, so ist $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ die K zugeordnete Idealgruppe von k. Sie hat in der Gruppe $\mathfrak{a}$ der zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale von k den Index $(K:k)$, und die Faktorgruppe $\mathfrak{a}/\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ ist zyklisch. $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ wird aus $\mathfrak{a}$ durch die Bedingung $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right) = 1$ herausgehoben.

Wird ein Ideal $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f}} \mathfrak{p}^{\varrho_\mathfrak{p}}$ durch die Exponenten $\varrho_\mathfrak{p}$ beschrieben, so kann die Gruppe $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$, weil sie zyklisch unter $\mathfrak{a}$ liegt, durch eine Relation

$$\sum \varrho_\mathfrak{p} \varepsilon_\mathfrak{p} \equiv 0 \pmod{(K:k)} \tag{4}$$

[1]) H. Hasse, Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, Trans. Amer. Math. Soc. **24** (1932), 171—214; Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933), 731—760. Vgl. auch M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. **4**, 1, Kap. VII, §§ 1—6.

[2]) Cl. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes, C. R. Acad. Sci. Paris **201** (1935), 632—634.

gekennzeichnet werden, in der $\varepsilon_\mathfrak{p}$ gewisse ganze Zahlen sind. Bis auf ganzzahlige Faktoren ist (4) auch die einzige Relation für die Untergruppe $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{a}$. Aus der anderen Kennzeichnung von $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ mittels des Artinsymbols ergibt sich, daß man für die $\varepsilon_\mathfrak{p}$ die Exponenten in einer Darstellung $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = S^{\varepsilon_\mathfrak{p}}$ der Frobeniussubstitutionen durch einen erzeugenden Automorphismus S von K/k zu nehmen hat.

Die zyklische Algebra $\mathfrak{A} = (\alpha, K, S)$ hat nun die Invarianten

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \frac{\varepsilon_\mathfrak{p}\, \varrho_\mathfrak{p}}{(K:k)} \pmod 1 \text{ [3]}$$

für $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$; die übrigen Invarianten sind $\equiv 0 \pmod 1$. (4) ist darum mit der Summenrelation (3) gleichbedeutend, und die Einzigkeit von (4) besagt gerade, daß es zu Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$, die außer (1), (2), (3) auch noch

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1 \text{ für } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f} \text{ und unendliche } \mathfrak{p}, \tag{5}$$

$$(K_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p}) \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1 \tag{6}$$

erfüllen, stets eine Algebra $\mathfrak{A} = (\alpha, K, S)$ gibt.

Sind jetzt *beliebige* Invarianten gemäß (1), (2), (3) vorgegeben, so bestimmen wir zunächst eine total negative Zahl β in k, und eine Zahl γ, die an der Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ positiv oder negativ ist, je nachdem $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) \equiv 0$ oder $\equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ gilt. Wir setzen $(\gamma, k(\sqrt{\beta}), S) = \mathfrak{B}$ und bilden die neuen Invarianten

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{p}}\right) \pmod 1.$$

Dann ist $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$ für unendliche $\mathfrak{p}$. Mit Hilfe eines Satzes von van der Waerden [4]) bestimmen wir einen zyklischen Kreiskörper K/k, der den Bedingungen

$$(K_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p}) \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

genügt und zu dessen Verzweigungsprimstellen $\mathfrak{q}$ die Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$ gehören. Die $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right)$ erfüllen (5) und (6), daher gibt es eine Algebra $\mathfrak{C} = (\alpha, K, S)$; $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}$ ist die Algebra mit den vorgegebenen Invarianten.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Summenrelation (3) eine invariante Form der Relationen (4) ist, durch die bei den zyklischen Körpern K/k die zugeordneten Idealgruppen $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ aus der vollen Idealgruppe $\mathfrak{a}$ herausgehoben werden.

---

[3]) Vgl. Deuring loc. cit. Seite 120.

[4]) B. L. van der Waerden, Elementarer Beweis eines zahlentheoretischen Existenztheorems, dieses Journ. 171 (1934), 1—3. Für die Schlußweise Deuring loc. cit. Kap. VII, § 5. (Beweis von Satz 4 auf Seite 118).

Eingegangen 28. November 1935.

Zur Theorie der komplexen Multiplikation. II.

Von *Masao Sugawara* in Tokyo.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich folgende Vermutung ausgesprochen:

Es sei Ω *ein imaginär quadratischer Zahlkörper und* $\mathfrak{m}$ *ein ganzes Ideal in* Ω. *Der Strahlklassenkörper* mod $\mathfrak{m}$ *über* Ω *entsteht dann dadurch, daß man eine Hassesche Strahlklasseninvariante* $\tau(\mathfrak{k}^*)$ *zu* Ω *adjungiert.*

Beweisen konnte ich sie dort unter der Annahme:

$$\text{(I)} \qquad 4 \mid \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \neq 4 .$$

Inzwischen ist es mir gelungen, diese Vermutung noch in weiteren Fällen zu bestätigen. Der Beweis in S. I läßt sich nämlich vereinfachen und verschärfen; man braucht statt (I) nur folgendes vorauszusetzen:

(I′) *Es existiert ein Primfaktor* $\mathfrak{p}$ *von* 2 *in* Ω *mit* $\mathfrak{p}^2 \mid \mathfrak{m}$ *und* $\varphi(\mathfrak{m}) \geqq 6$.

Ist insbesondere $\mathfrak{p}$ vom absolut ersten Grade, so kann es wegen $\varphi(\mathfrak{p}) = 1$ nie im Führer einer Idealgruppe in Ω genau in der ersten Potenz aufgehen. Zieht man also bei der Voraussetzung (I′) nur solche Werte von $\mathfrak{m}$ in Betracht, die wirklich als Führer einer Idealgruppe in Ω auftreten können, so ist hiermit meine obige Vermutung für „fast alle“ durch einen Primfaktor ersten Grades von 2 teilbaren Moduln $\mathfrak{m}$ bestätigt. — „Fast alle“ soll hier wie im folgenden „bis auf endlich viele Ausnahmen“ bedeuten.

Eine ähnliche Methode, die von einer anderen Form des Additionstheorems der $\wp$-Funktion Gebrauch macht, gestattet nun, die Behauptung auch unter folgender Voraussetzung zu beweisen:

$$\text{(II)} \qquad \Psi(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{m}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{2}{N(\mathfrak{p})}\right) \geqq 5 .$$

Soweit $\mathfrak{m}$ nicht durch einen Primfaktor ersten Grades von 2 teilbar ist, ist $\Psi(\mathfrak{m})$ eine *positive* ganze rationale Zahl; und es gibt offenbar nur endlich viele Werte von $\mathfrak{m}$ für die $0 < \Psi(\mathfrak{m}) < 5$ gilt. Meine Vermutung ist damit überhaupt für „fast alle“ $\mathfrak{m}$ bestätigt.

Zum Beweis setze ich die Kenntnis von S. I voraus und kann mich dementsprechend kurz fassen. Ferner lasse ich die Körper $\Omega = \mathsf{P}(\sqrt{-1})$, $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ außer Betracht; für sie ist ja, wie bereits in S. I erwähnt, meine Vermutung bereits auf Grund der klassischen Theorie richtig.

Beweis unter der Annahme (I′).

---

[1]) M. Sugawara, Zur Theorie der komplexen Multiplikation. I, ds. Journal **174** (1936); im folgenden zitiert mit S. I.

Es sei $\tau(\mathfrak{f}^*) = \tau(\varrho\,|\,\mathfrak{a})$ eine Strahlklasseninvariante mod $\mathfrak{m}$ und ω eine durch $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{p}}$ teilbare ganze Zahl in Ω, die aber $\not\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{m}$ ist. $\omega\varrho$ ist dann offenbar eine Halbperiode der Funktion $\tau(u\,|\,\mathfrak{a})$.

Beachtet man nun, daß in der in S. I zugrunde gelegten Additionsformel

$$(1) \qquad (\tau(u+h)+\tau(u)+\tau(h))(\tau(u)-\tau(h))^2 = \tau(u)^3 - A\tau(u) + B$$

die rechte Seite für $u = h$ verschwindet, daß also das Polynom $x^3 - Ax + B$ durch $x - \tau(h)$ teilbar ist, so kann man diese Formel durch Division beider Seiten mit $\tau(u) - \tau(h)$ in die folgende einfachere Gestalt bringen:

$$(1') \quad (\tau(u+h)+\tau(u)+\tau(h))(\tau(u)-\tau(h)) = \tau(u)^2 + \tau(u)\tau(h) + \tau(h)^2 - A\,,$$

oder

$$(1'') \qquad (2\,\tau(h)^2 - A) + \tau(h)\,(\tau(u) + \tau(u+h)) = \tau(u)\,\tau(u+h)\,.$$

Nach unseren Voraussetzungen $\varphi(\mathfrak{m}) \geqq 6$ und $\Omega \neq \mathsf{P}(\sqrt{-1}), \mathsf{P}(\sqrt{-3})$ gibt es nun sicher drei zu $\mathfrak{m}$ prime Zahlen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, die in verschiedenen Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$ liegen. In (1′) bzw. (1″) setzen wir $h = \omega\varrho$, $u = \omega_i\varrho$ $(i = 1, 2, 3)$. Wie in S. I sieht man dann leicht ein, daß die $\tau(\omega_i\varrho\,|\,\mathfrak{a})$ und die $\tau((\omega_i+\omega)\varrho\,|\,\mathfrak{a})$ verschiedene Strahlklasseninvarianten mod $\mathfrak{m}$ sind. Ferner ist es unmöglich, daß die drei Zahlen

$$\sigma_i = \tau((\omega_i+\omega)\,\varrho\,|\,\mathfrak{a}) + \tau(\omega_i\varrho\,|\,\mathfrak{a})$$

sämtlich einander gleich ausfallen. Denn sonst sei σ ihr gemeinsamer Wert. Das Polynom zweiten Grades in x,

$$(\sigma + \tau(\omega\varrho))(x - \tau(\omega\varrho)) - (x^2 + x\tau(\omega\varrho) + \tau(\omega\varrho)^2 - A)\,,$$

hätte dann nach (1′) die drei verschiedenen Wurzeln $\tau(\omega_i\varrho\,|\,\mathfrak{a})$.

Es sei also etwa $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Aus den nach (1″) gültigen Formeln

$$(2\,\tau(\omega\varrho)^2 - A) + \sigma_i\,\tau(\omega\varrho) = \tau(\omega_i\varrho)\,\tau((\omega_i+\omega)\varrho) \qquad (i = 1, 2)$$

ergibt sich dann durch Subtraktion, daß $\tau(\omega\varrho)$ in $\Omega(\tau(\mathfrak{f}^*))$ liegt. Nach (1′) und (1″) gehören mithin auch die Zahlen A, B zu $\Omega(\tau(\mathfrak{f}^*))$. Nach S. I, § 1 bzw. § 3 ist damit der Beweis erbracht.

Beweis unter der Annahme (II) [2]).

Zunächst beweisen wir folgenden

Hilfssatz. *Wenn* $\Omega \neq \mathsf{P}(\sqrt{-1}), \mathsf{P}(\sqrt{-3})$ *und*

$$(2) \qquad \Psi(\mathfrak{m}) \geqq 5,$$

so gibt es in Ω *sicher drei Zahlen* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *von der Art, daß* ω_i *und* $\omega_i + 1$ *prim zu* $\mathfrak{m}$ *sind und überdies die drei durch* ω_i *und* $\omega_i + 1$ mod $\mathfrak{m}$ *bestimmten Paare von Strahlklassen* mod $\mathfrak{m}$, *die wir im folgenden mit*

$$\{(\omega_i), (\omega_i + 1)\} \bmod \mathfrak{m} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

bezeichnen, voneinander verschieden sind.

Dabei sollen zwei Paare $\{\alpha, \beta\}$ und $\{\gamma, \delta\}$ dann und nur dann als „gleich“ gelten, wenn $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ oder $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ ist.

---

[2]) Die folgende Beweisanordnung verdanke ich Herrn Iyanaga; mein ursprünglicher Beweis war komplizierter. Ich möchte Herrn Iyanaga auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für seine Verbesserungen aussprechen.

Beweis. $\Psi(\mathfrak{m})$ gibt, wie leicht ersichtlich, die Anzahl der $\mathrm{mod}^+ \mathfrak{m}$ inkongruenten Zahlen ω von der Art an, daß ω und $\omega + 1$ beide zu $\mathfrak{m}$ prim sind. Zwei Strahlklassenpaare mod $\mathfrak{m}$,

$$\{(\omega), (\omega + 1)\} \quad \text{und} \quad \{(\omega'), (\omega' + 1)\},$$

sind aber für $\mathfrak{m} \neq 2$ — und das ist auf Grund der Voraussetzung (2) sicher der Fall — dann und nur dann gleich, wenn eine der beiden folgenden Kongruenzen stattfindet:

$$\omega' \equiv \omega \qquad (\mathrm{mod}^+ \mathfrak{m})$$
$$\omega' \equiv -\omega - 1 \qquad (\mathrm{mod}^+ \mathfrak{m}).$$

Ist also $\Psi(\mathfrak{m}) > 2 \cdot 2$, d. h. gilt (2), so gibt es mehr als zwei Werte ω derart, daß $\{(\omega), (\omega + 1)\}$ verschiedene zu $\mathfrak{m}$ prime Restklassenpaare $\mathrm{mod}^+ \mathfrak{m}$ darstellt; w. z. b. w.

Unser Beweis wird nun auf Grund der folgenden Additionsformel [3]) der $\wp$-Funktion geführt:

$$(p_1 + p_2 + p_3)(4 p_1 p_2 p_3 - g_3) = \left(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1 + \frac{g^2}{4}\right)^2,$$

wobei

$$p_1 = \wp(u), \qquad p_2 = \wp(v), \qquad p_3 = \wp(u + v).$$

Es sei $\tau(\mathfrak{k}^*) = \tau(\varrho \,|\, \mathfrak{a})$ eine Strahlklasseninvariante mod $\mathfrak{m}$. Rechnet man die eben angegebene Formel auf die Funktion $\tau(u) = \tau(u \,|\, \mathfrak{a})$ um, so findet man

$$(3) \qquad 4(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)(\tau_1\tau_2\tau_3 + B) = (\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 + A)^2,$$

wobei

$$\tau_1 = \tau(u), \quad \tau_2 = \tau(v), \quad \tau_3 = \tau(u + v),$$
$$A = 3\, j(\mathfrak{a})\,(j(\mathfrak{a}) - 2^6 \cdot 3^3),$$
$$B = 2\, j(\mathfrak{a})\,(j(\mathfrak{a}) - 2^6 \cdot 3^3)^2$$

gesetzt ist, oder auch

$$(3') \qquad 4(\tau_1 + x)(\tau_1 y + B) = (\tau_1 x + y + A)^2,$$

wo

$$\tau_2 + \tau_3 = x, \qquad \tau_2\tau_3 = y$$

gesetzt ist.

Denkt man sich nun in (3') τ_1, A, B als Konstante, x, y als Variable, so stellt (3') eine Parabel in der x, y-Ebene dar, die nur dann ausartet, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \tau_1^2 & -\tau_1 & \tau_1 A - 2B \\ -\tau_1 & 1 & A - 2\tau_1^2 \\ \tau_1 A - 2B & A - 2\tau_1^2 & A^2 - 4\tau_1 B \end{vmatrix} = -4(\tau_1^3 - A\tau_1 + B)^2$$

verschwindet.

Unter der Annahme (2) gibt es nun offenbar zwei Werte von ω so, daß $\tau(\omega\varrho \,|\, \mathfrak{a})$ verschiedene Strahlklasseninvarianten mod $\mathfrak{m}$ sind. Verschwindet $D = D(u \,|\, \mathfrak{a})$ für $u = \omega\varrho$ mit diesen zwei Werten von ω, so kann man die so entstehenden zwei Gleichungen als lineare inhomogene Gleichungen für die Zahlen A, B auffassen, und damit durch Auflösung A, B als Zahlen in $\Omega(\tau(\mathfrak{k}^*))$ finden.

Da sich also der Beweis in diesem Fall mit unserem Schluß aus S. I durchführen läßt, nehmen wir weiterhin an, daß es ein ϱ mit $D(\varrho \,|\, \mathfrak{a}) \neq 0$ gibt. Wir setzen dann in (3) $u = \varrho$, $v = \omega_i \varrho$, wo die ω_i $(i = 1, 2, 3)$ gemäß unserem Hilfssatz bestimmt sind.

[3]) Siehe etwa Hurwitz-Courant, Funktionentheorie (Berlin 1925), S. 172.

Setzen wir ferner

$$\tau(\omega_i \varrho \,|\, \mathfrak{a}) + \tau((1 + \omega_i)\varrho \,|\, \mathfrak{a}) = x_i$$
$$\tau(\omega_i \varrho \,|\, \mathfrak{a}) \cdot \tau((1 + \omega_i)\varrho \,|\, \mathfrak{a}) = y_i ,$$

so sind ersichtlich

$$(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

drei verschiedene Punkte auf der nicht ausgearteten Parabel (3′) mit $\tau_1 = \tau(\varrho \,|\, \mathfrak{a})$. Diese Punkte können daher nicht auf einer Geraden liegen, d. h. es ist die Determinante

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Die drei aus (3′) entspringenden Formeln

$$4(\tau_1 + x_i)(\tau_1 y_i + B) = (\tau_1 x_i + y_i + A)^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sind nun wieder drei lineare inhomogene Gleichungen für die Zahlen

$$A^2, \quad 2A, \quad -4B$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau_1 x_1 + y_1 & x_1 + \tau_1 \\ 1 & \tau_1 x_2 + y_2 & x_2 + \tau_1 \\ 1 & \tau_1 x_3 + y_3 & x_3 + \tau_1 \end{vmatrix} = -d \neq 0 .$$

Unser Beweis ist also auch in diesem Fall nach dem Schema aus S. I durchführbar.

Eingegangen 8. Juli 1935.

Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper II.

Automorphismen und Meromorphismen. Das Additionstheorem.

Von *Helmut Hasse* in Göttingen.

Wie in Teil I dieser Arbeit [1]) sei durchweg K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht 1 über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl).

§ 1. Die Automorphismengruppe von K.

1. Unter einem *Automorphismus* von K verstehen wir einen Isomorphismus σ von K auf sich, bei dem der Konstantenkörper k elementweise auf sich abgebildet wird. Wir schreiben $z\sigma$, $\mathfrak{p}\sigma$ für die Bilder eines Elementes z aus K und eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ von K bei σ.

Ein Automorphismus σ von K ist durch die Bilder $\mathfrak{p}\sigma$ aller Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K eindeutig festgelegt.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß ein Automorphismus von K, der alle Primdivisoren von K festläßt, der identische ist. Läßt nun σ alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K fest, so führt σ jedes Element z aus K in ein konstantes Multiplum über:

$$z\sigma = c_z z, \quad c_z \text{ in } k.$$

Aus $(az)\sigma = a(z\sigma)$ und $(z_1 + z_2)\sigma = z_1\sigma + z_2\sigma$ sieht man sofort:

$$c_{az} = c_z \quad \text{für } a \text{ in } k,$$

$$c_{z_1+z_2} = c_{z_1} = c_{z_2} \quad \text{für über } k \text{ linear-unabhängige } z_1, z_2.$$

Daraus folgt, daß alle Faktoren c_z einander gleich sind; wegen $c_1 = 1$ ist also $\sigma = 1$.

Ganz entsprechend ergibt sich die für später wichtige Tatsache:

Läßt ein Automorphismus σ von K alle Primdivisoren eines Teilkörpers K_0 von K fest, so läßt σ alle Elemente aus K_0 fest, ist also ein Automorphismus von K/K_0.

2. Nach dem Riemann-Rochschen Satz sind die Divisorenklassen nullten Grades von K eindeutig durch die Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentiert, wo $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von K durchläuft und $\mathfrak{o}$ irgendein fester Primdivisor von K ist. Es ist für alles Folgende zweckmäßig, für die Multiplikation der Klassen bei dieser Repräsentation die additive Schreibweise einzuführen:

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 \quad \text{für} \quad \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{o}}\,\frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{o}} \sim \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}}\,.$$

---

[1]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, Die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung, Journ. f. Math. **175** (1936); im folgenden zitiert als H I.

Dann stellt sich die Divisorenklassengruppe nullten Grades D von K als additive Gruppe $D_{\mathfrak{o}}$ mit dem Nullelement $\mathfrak{o}$ dar.

Nach dem zuvor Bewiesenen ist ein Automorphismus σ von K durch Angabe des Bildes $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\sigma$ und des durch ihn bewirkten Automorphismus von D festgelegt. In der Darstellung $D_{\mathfrak{o}}$ schreibt sich das so:

$$\mathfrak{p}\sigma = \mathfrak{p}^* + \mathfrak{a},$$

wo $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ ein Automorphismus von $D_{\mathfrak{o}}$ ist; durch ihn und $\mathfrak{a}$ ist σ festgelegt. Es entsteht die Frage, für welche Automorphismen $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ der Gruppe $D_{\mathfrak{o}}$ und welche Primdivisoren $\mathfrak{a}$ die Substitution $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^* + \mathfrak{a}$ wirklich aus einem (dann eindeutig bestimmten) Automorphismus σ von K entspringt.

3. Wir zeigen zunächst, daß die *Spiegelungen*

$$\mathfrak{q} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

von $D_{\mathfrak{o}}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$ wirklich durch Automorphismen $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ von K geliefert werden.

Nach dem Riemann-Rochschen Satz existiert nämlich ein nicht-konstantes ganzes Multiplum z von $\frac{1}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}}$ in K (eindeutig bis auf ganze Lineartransformationen). Durch $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$ wird dann (eindeutig) der Teilkörper $k(z)$ vom Geschlecht 0 festgelegt. $K/k(z)$ ist vom Grade 2 und separabel [2]), besitzt also einen Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ der Ordnung 2. Dieser vertauscht $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$ und ebenso jedes weitere Paar bzgl. $k(z)$ konjugierter Primdivisoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Für ein solches Paar ist aber

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}} \cong z - c, \quad c \text{ in } k,$$

also

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}} \sim 1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{q} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{a}.$$

Die Gesamtheit der Spiegelungen $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ ist von der Wahl von $\mathfrak{o}$ unabhängig, denn es gilt ersichtlich die Regel:

$$\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \text{ dann (und nur dann), wenn } \mathfrak{q} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{a}, \text{ d. h. } \mathfrak{o}\mathfrak{a} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$

Die aus den $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{S}$ ist also eine Invariante von K, und daher ein Normalteiler in der Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Automorphismen von K.

4. Die aus den Spiegelungen erzeugte Gruppe $\mathfrak{S}$ läßt sich aus der speziellen Spiegelung

$$\sigma_{\mathfrak{o}} = \sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}\sigma_{\mathfrak{o}} = -\mathfrak{p}$$

und den Automorphismen

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{o}}\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

erzeugen. Auch die *Translationen $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ von $D_{\mathfrak{o}}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$ werden also wirklich durch Automorphismen $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ von K geliefert.* Für sie gilt die Regel:

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \text{ dann (und nur dann), wenn } \mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}, \text{ d. h. } \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} \sim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}.$$

Die von ihnen gebildete abelsche Gruppe $\mathfrak{T}$ ist hiernach wieder von der Wahl von $\mathfrak{o}$ unabhängig, also eine Invariante von K, und daher ein Normalteiler nicht nur in $\mathfrak{S}$, sondern auch in $\mathfrak{A}$.

---

[2]) Daß das auch im Falle $p = 2$ stimmt, ergibt sich aus der folgenden allgemeinen Tatsache: Über einem algebraischen Funktionenkörper K mit vollkommenen Konstantenkörper k der Primzahlcharakteristik p gibt es nur eine einzige inseparable Erweiterung vom Grade p, nämlich den Körper $K^{\frac{1}{p}}$; dieser ist zu K absolut (bzgl. des Primkörpers) isomorph, also vom gleichen Geschlecht wie K.

Die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist auf Grund der Zuordnung

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} \longleftrightarrow \mathfrak{a}$$

zur Gruppe $D_\mathfrak{o}$ (und damit zur Divisorenklassengruppe nullten Grades D) isomorph.

$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ bewirkt in D die Multiplikation mit der Klasse von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{o}}$.

Aus der hierdurch bestimmten Struktur von $\mathfrak{T}$ ergibt sich die Struktur von $\mathfrak{S}$ auf Grund der Relationen:

$$\sigma_\mathfrak{o}^2 = 1, \quad \sigma_\mathfrak{o}\,\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\,\sigma_\mathfrak{o};$$

das $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{T}$ aus erzeugende Element $\sigma_\mathfrak{o}$ transformiert also die Elemente von $\mathfrak{T}$ in ihre Entgegengesetzten.

5.[3]) Über die Struktur der Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Automorphismen von K ergeben sich aus dem Vorhergehenden ohne weiteres die folgenden Aussagen:

Jeder Automorphismus σ von K besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\sigma = \zeta\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}\sigma = \mathfrak{p}\zeta + \mathfrak{a}$$

in einen $\mathfrak{o}$ festlassenden Automorphismus ζ und eine Translation $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$. Dabei ist $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}\zeta$ der oben mit $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ bezeichnete Automorphismus von $D_\mathfrak{o}$; jetzt steht fest, daß er durch einen Automorphismus ζ von K geliefert wird.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ wird hiernach eindeutig repräsentiert durch die $\mathfrak{o}$ festlassenden Automorphismen ζ. Diese bilden selbst eine Gruppe $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$. Ist ihre Struktur bekannt, so ergibt sich die Struktur von $\mathfrak{A}$ aus der Transformationsregel

$$\zeta^{-1}\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\zeta = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}\zeta},$$

in der rechts gerade die durch $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ gelieferten Automorphismen von $D_\mathfrak{o}$ auftreten (durch den Isomorphismus $\mathfrak{a} \to \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ aus der Gruppe $D_\mathfrak{o}$ nach der Gruppe $\mathfrak{T}$ verlagert).

Über die Struktur von $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ können aus der isomorphen Darstellung als Automorphismengruppe von $D_\mathfrak{o}$ Aussagen gewonnen werden.

Zunächst sind die Automorphismen ζ aus $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ jedenfalls mit dem speziellen solchen Automorphismus $\sigma_\mathfrak{o}$ vertauschbar, da dieser in $D_\mathfrak{o}$ den Übergang zum Entgegengesetzten bewirkt.

Ferner sind die ζ auch Automorphismen für jede charakteristische Untergruppe H von $D_\mathfrak{o}$, also insbesondere für die Untergruppen H_n der $\mathfrak{p}$ mit $n\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ in $D_\mathfrak{o}$, deren Struktur in H I bestimmt wurde.

Um das auszunutzen, beweisen wir zunächst:

Läßt ein von 1, $\sigma_\mathfrak{o}$ *verschiedener Automorphismus* ζ *aus* $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ *außer* $\mathfrak{o}$ *noch zwei verschiedene Primdivisoren* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ *fest, so ist* $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{o}$.

ζ läßt nämlich mit $\mathfrak{o}$ auch den Invariantenkörper $k(x)$ von $\sigma_\mathfrak{o}$ als Ganzes fest, bewirkt also einen Automorphismus von $k(x)$, und zwar nach Voraussetzung nicht den identischen. Mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ bleiben auch die bzgl. $k(x)$ konjugierten $\bar{\mathfrak{p}}_1 = -\mathfrak{p}_1$, $\bar{\mathfrak{p}}_2 = -\mathfrak{p}_2$ bei ζ fest. Als Automorphismus von $k(x)$ läßt dann ζ neben dem Primdivisor $\mathfrak{o}^2$ noch die beiden von $\mathfrak{o}^2$ verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{p}_1\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\mathfrak{p}_2\bar{\mathfrak{p}}_2$ von $k(x)$ fest. Nun hat aber bekanntlich ein Automorphismus $\neq 1$ von $k(x)$, als (gebrochene) lineare Substitution von x, höchstens zwei verschiedene Fixpunkte. Daraus folgt $\mathfrak{p}_1\bar{\mathfrak{p}}_1 = \mathfrak{p}_2\bar{\mathfrak{p}}_2$, wegen $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ also $\mathfrak{p}_1 = \bar{\mathfrak{p}}_2$, $\mathfrak{p}_2 = \bar{\mathfrak{p}}_1$ oder also $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{o}$.

[3]) Die nachstehenden Ausführungen sind für das Folgende entbehrlich. Die in Rede stehenden Tatsachen können aus dem in Teil III bewiesenen Satz über die Struktur des Meromorphismenrings von K entnommen werden. Es ist aber vielleicht doch von Interesse zu sehen, wie weit man die Struktur der Automorphismengruppe schon hier bestimmen kann.

Es sei nun H eine charakteristische Untergruppe von $D_\mathfrak{o}$, die nicht von der Ordnung 1, 2 oder 3 ist. Dann enthält H zwei von $\mathfrak{o}$ und untereinander verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, für die auch $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 \neq \mathfrak{o}$ ist. $\sigma_\mathfrak{o}$ bewirkt den identischen Automorphismus in H oder nicht, je nachdem H nur aus Elementen der Ordnung 2 besteht oder nicht. Aus dem bewiesenen Satz ergibt sich daher, *daß* $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}/\{\sigma_\mathfrak{o}\}$ *oder* $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ *selbst sich isomorph als Automorphismengruppe von H darstellt, je nachdem H nur aus Elementen der Ordnung* 2 *besteht oder nicht.*

Wie in H I bewiesen wurde, ist nun speziell H_n für jedes $n \not\equiv 0 \bmod. p$ von der endlichen Ordnung n^2, besitzt also nur endlich viele Automorphismen. Daraus ergibt sich jedenfalls:

Die Gruppe $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ *ist endlich; es gibt also nur endlich viele Automorphismen von* K, *die einen gegebenen Primdivisor* $\mathfrak{o}$ *von* K *festlassen.*

Genauere Aussagen über $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ ergeben sich, wenn man die in H I genau bestimmte Struktur von H_n ausnutzt: H_n ist abelsch vom Typus (n, n) für jedes $n \not\equiv 0 \bmod. p$, die Automorphismengruppe von H_n ist also die Gruppe aller zweireihigen regulären Matrizen mod. n. Daraus findet man durch Ausnutzung von $n = 2, 3$ leicht:

Für $p \neq 2$ ist $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}/\{\sigma_\mathfrak{o}\}$ zu einer Untergruppe der Dreiecksgruppe (Ordnung 6) isomorph.

Für $p \neq 3$ ist $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ zu einer Untergruppe der erweiterten Oktaedergruppe (Ordnung 48), $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}/\{\sigma_\mathfrak{o}\}$ zu einer Untergruppe der Oktaedergruppe (Ordnung 24) isomorph.

Auf die genaue Bestimmung der Struktur von $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ gehe ich hier nicht ein.

§ 2. Die Meromorphismen von K.

1. Unter einem *eigentlichen Meromorphismus* von K verstehen wir einen Isomorphismus λ von K auf einen Teilkörper $K\lambda$, bei dem der Konstantenkörper k elementweise auf sich abgebildet wird. Wir schreiben $z\lambda$, $\mathfrak{p}\lambda$ für die Bilder eines Elementes z aus K und eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ von K bei λ.

Unter der *Norm* von λ verstehen wir den Körpergrad von $K/K\lambda$:

$$N(\lambda) = [K : K\lambda].$$

Neben den eigentlichen Meromorphismen von K, unter denen speziell die Automorphismen σ von K vorkommen — charakterisiert durch $N(\sigma) = 1$ —, führen wir noch als *uneigentliche Meromorphismen* λ die Homomorphismen von K auf den Konstantenkörper k ein. Diese λ entsprechen umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, auf Grund der Relation

$$z\lambda = z\mathfrak{p},$$

wo $z\mathfrak{p}$ den konstanten Repräsentanten der Restklasse von z mod. $\mathfrak{p}$ bezeichnet; falls z für $\mathfrak{p}$ gebrochen ist, hat man formal $z\mathfrak{p} = \infty$ zu rechnen (Jungscher Begriff des Primdivisors!). Wir schreiben $\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{p}$ für diese Zuordnung.

Als Norm eines solchen uneigentlichen Meromorphismus rechnen wir

$$N(\lambda) = 0.$$

2. Das *Produkt* zweier Meromorphismen λ, λ' definieren wir durch Nacheinanderausführung:

$$z(\lambda\lambda') = (z\lambda)\lambda'.$$

Hierdurch wird $\lambda\lambda'$ eindeutig als ein Meromorphismus von K festgelegt, und zwar als ein eigentlicher oder uneigentlicher, je nachdem die Meromorphismen λ, λ' beide eigentlich sind oder mindestens einer von ihnen uneigentlich ist.

Ist λ uneigentlich, so ist $\lambda\lambda' = \lambda$, weil k bei λ' elementweise festbleibt.

Ist λ' uneigentlich, $\lambda' \longleftrightarrow \mathfrak{p}$, so bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Primdivisor, der $\lambda\lambda'$ zugeordnet ist, mit $\lambda\mathfrak{p}$. Diese für alles Folgende grundlegende Bildung $\lambda\mathfrak{p}$ ist also implizit durch

$$\lambda\lambda' \longleftrightarrow \lambda\mathfrak{p}, \text{ wenn } \lambda' \longleftrightarrow \mathfrak{p},$$

d. h. durch

$$z(\lambda\mathfrak{p}) = (z\lambda)\mathfrak{p}$$

definiert.

Explizit bestimmt sich $\lambda\mathfrak{p}$ folgendermaßen:

a) Wenn λ eigentlich ist, so ist

$$\lambda\mathfrak{p} = (N_\lambda\mathfrak{p})\lambda^{-1},$$

wo N_λ die Norm für $K/K\lambda$ bezeichnet. Dann ist nämlich $N_\lambda\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$ enthaltende Primdivisor von $K\lambda$, und es wird behauptet, daß $\lambda\mathfrak{p}$ aus diesem durch rückwärtige Ausführung des Isomorphismus λ entsteht. In der Tat, sei

$$z\lambda \equiv c \text{ mod. } \mathfrak{p}, \quad c \text{ in } k,$$

dann folgt auch

$$z\lambda \equiv c \text{ mod. } N_\lambda\mathfrak{p},$$

weil $z\lambda$ in $K\lambda$ liegt, und daraus durch λ^{-1} weiter

$$z \equiv c \text{ mod. } (N_\lambda\mathfrak{p})\lambda^{-1},$$

weil c bei λ^{-1} festbleibt, zusammengenommen also

$$(z\lambda)\mathfrak{p} = z(N_\lambda\mathfrak{p})\lambda^{-1}.$$

b) Wenn λ uneigentlich, $\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ ist, so ist

$$\lambda\mathfrak{p} = \mathfrak{a};$$

denn dann ist ja, wie zuvor festgestellt, $\lambda\lambda' = \lambda$, was hier

$$(z\lambda)\mathfrak{p} = (z\mathfrak{a})\mathfrak{p} = z\mathfrak{a}$$

besagt.

Für einen Automorphismus $\lambda = \sigma$ gilt nach obigem

$$\sigma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\sigma^{-1},$$

also z. B.

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{p}}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}.$$

Auf Grund der Definition durch Nacheinanderausführung ist das Meromorphismenprodukt *assoziativ*:

$$(\lambda\lambda')\lambda'' = \lambda(\lambda'\lambda'').$$

Darin steckt insbesondere die Regel

$$(\lambda\lambda')\mathfrak{p} = \lambda(\lambda'\mathfrak{p}).$$

Ferner gilt die *Normenproduktregel*

$$N(\lambda\lambda') = N(\lambda)N(\lambda').$$

Nach dem schon Bemerkten sind nämlich beide Seiten 0, wenn λ oder λ' uneigentlich ist; es genügt also, diese Regel für zwei eigentliche Meromorphismen λ, λ' zu bestätigen. Da folgt sie ohne weiteres aus

$$K(\lambda\lambda') = (K\lambda)\lambda';$$

denn danach hat man

$$K \geqq K\lambda' \geqq K\lambda\lambda'$$

und

$$[K\lambda' : K\lambda\lambda'] = [K : K\lambda],$$

weil $K\lambda'/K\lambda\lambda'$ aus $K/K\lambda$ durch Anwendung des Isomorphismus λ' entsteht.

3. Ein Meromorphismus μ heiße *normiert* in bezug auf einen festen Primdivisor $\mathfrak{o}$, wenn

$$\mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$$

ist. Für eigentliches μ bedeutet das $(N_\mu \mathfrak{o})\mu^{-1} = \mathfrak{o}$ oder also

$$N_\mu \mathfrak{o} = \mathfrak{o}\mu,$$

d. h. der $\mathfrak{o}$ enthaltende Primdivisor von $K\mu$ stimmt mit dem Bild von $\mathfrak{o}$ bei μ überein. Für uneigentliches μ bedeutet es

$$\mu \longleftrightarrow \mathfrak{o};$$

denn für $\mu \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ gilt ja durchweg $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$, also speziell auch $\mu\mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, so daß μ dann und nur dann normiert ist, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist.

Für zwei normierte Meromorphismen μ, μ' folgt aus dem Assoziativgesetz, daß auch

$$(\mu\mu')\mathfrak{o} = \mu(\mu'\mathfrak{o}) = \mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$$

ist. Das Produkt normierter Meromorphismen ist also wieder normiert, die normierten Meromorphismen bilden ein *multiplikativ abgeschlossenes System* M.

Der uneigentliche normierte Meromorphismus $\mu_\mathfrak{o} \longleftrightarrow \mathfrak{o}$ ist *Nullelement* von M. Denn man hat einerseits durchweg $\mu_\mathfrak{o}\mu = \mu_\mathfrak{o}$, andererseits durchweg $\mu\mu_\mathfrak{o} \longleftrightarrow \mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o} \longleftrightarrow \mu_\mathfrak{o}$, d. h. $\mu\mu_\mathfrak{o} = \mu_\mathfrak{o}$. Wir schreiben daher einfach $\mu_\mathfrak{o} = 0$.

Wegen des Normenproduktsatzes besitzt das System M *keine echten Nullteiler.*

Jeder Meromorphismus λ besitzt eine *eindeutige Zerlegung*

$$\lambda = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\,\mu$$

in einen Translationsautomorphismus $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}$ und einen normierten Meromorphismus μ. In der Tat, $\mu = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\lambda$ ist dann und nur dann normiert, wenn

$$\mathfrak{o} = \mu\mathfrak{o} = (\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\lambda)\mathfrak{o} = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,(\lambda\mathfrak{o}) = (\lambda\mathfrak{o})\,\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}} = \lambda\mathfrak{o} - \mathfrak{a}$$

ist, wenn also der verfügbare Primdivisor $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{o}$ gewählt wird. Für uneigentliches $\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ ist gerade $\mathfrak{a}$ der zur Normierung führende Primdivisor, denn man hat dafür

$$\mu = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\lambda \longleftrightarrow \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}.$$

$K\lambda$ und somit N_λ und $N(\lambda)$ hängen nur von dem normierten Bestandteil μ von λ ab.

Die eindeutige Zerlegung $\lambda = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\,\mu$ entspricht dem in § 1 auftretenden Spezialfall $\sigma = \zeta\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$, also $\sigma^{-1} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\zeta^{-1}$ für Automorphismen. Das System M der auf $\mathfrak{o}$ normierten μ umfaßt die Gruppe $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ der $\mathfrak{o}$ festlassenden ζ.

4. Für einen normierten Meromorphismus μ gilt die Regel

$$\mu(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) = \mu\mathfrak{p}_1 + \mu\mathfrak{p}_2,$$

d. h. die Abbildung $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ stellt einen *Homomorphismus der Gruppe $D_\mathfrak{o}$ in sich* dar.

Für uneigentliches μ, also $\mu = 0$, ist das der Nullhomomorphismus; denn aus $0 \longleftrightarrow \mathfrak{o}$ folgt $0\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für jedes $\mathfrak{p}$.

Für eigentliches μ folgt die Regel aus der Zerlegung der Abbildung gemäß $\mu\mathfrak{p} = (N_\mu\mathfrak{p})\mu^{-1}$ in die beiden durch N_μ und μ^{-1} gelieferten Abbildungen. Aus der Relation

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3, \text{ d. h. } \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_3} \cong z \text{ in } K,$$

ergibt sich nämlich durch N_μ die Relation

$$\frac{N_\mu\mathfrak{p}_1 \cdot N_\mu\mathfrak{p}_2}{N_\mu\mathfrak{o} \cdot N_\mu\mathfrak{p}_3} \cong N_\mu z \text{ in } K\mu,$$

also wegen $N_\mu\mathfrak{p}_i = (\mu\mathfrak{p}_i)\mu$ und der Normierungsbedingung $N_\mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\mu$

$$\frac{(\mu\mathfrak{p}_1)\mu \cdot (\mu\mathfrak{p}_2)\mu}{\mathfrak{o}\mu \cdot (\mu\mathfrak{p}_3)\mu} \cong N_\mu z, \text{ d. h. } (\mu\mathfrak{p}_1)\mu + (\mu\mathfrak{p}_2)\mu = (\mu\mathfrak{p}_3)\mu$$

in der Gruppe $D_{\mathfrak{o}\mu}$ von $K\mu$, und daraus durch μ^{-1} weiter

$$\mu\mathfrak{p}_1 + \mu\mathfrak{p}_2 = \mu\mathfrak{p}_3$$

in der Gruppe $D_\mathfrak{o}$ von K.

Durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von K, so durchläuft $N_\mu\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von $K\mu$, also $(N_\mu\mathfrak{p})\mu^{-1} = \mu\mathfrak{p}$ wieder alle Primdivisoren von K. Der durch eigentliches normiertes μ bewirkte Homomorphismus $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ von $D_\mathfrak{o}$ in sich erfolgt also sogar auf die volle Gruppe $D_\mathfrak{o}$.

Ist λ ein beliebiger Meromorphismus und

$$\lambda = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\mu$$

seine eindeutige Zerlegung, so hat man

$$\lambda\mathfrak{p} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}(\mu\mathfrak{p}) = (\mu\mathfrak{p})\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}.$$

Die durch $\mathfrak{p} \to \lambda\mathfrak{p}$ gelieferte Abbildung der Gruppe $D_\mathfrak{o}$ in sich stellt sich also, unter Berücksichtigung der Homomorphie-Eigenschaft von $\mu\mathfrak{p}$, als eine *lineare Substitution* dar, die sich dann und nur dann auf das konstante Glied $\mathfrak{a}$ reduziert, wenn λ uneigentlich ist, und dann und nur dann auf das lineare Glied $\mu\mathfrak{p}$, wenn λ normiert ist.

Dem Meromorphismenprodukt $\lambda\lambda'$ entspricht dabei die Zusammensetzung der linearen Substitutionen nach dem Schema

$$\lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$
$$\lambda'\mathfrak{p} = \mu'\mathfrak{p} + \mathfrak{a}'$$
$$\lambda\lambda'\mathfrak{p} = \mu(\mu'\mathfrak{p} + \mathfrak{a}') + \mathfrak{a} = \mu\mu'\mathfrak{p} + (\mu\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}).$$

Die lineare Substitution $\lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ entspricht dem in § 1 auftretenden Spezialfall $\mathfrak{p}\sigma = \mathfrak{p}\zeta + \mathfrak{a}$ für Automorphismen, wenn man dafür gemäß der obigen Bemerkung $\sigma^{-1}\mathfrak{p} = \zeta^{-1}\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ schreibt.

5. In Verallgemeinerung der in § 1 bewiesenen Festlegung der Automorphismen durch die ihnen zugeordneten linearen Substitutionen in $D_\mathfrak{o}$ beweisen wir hier:

Ein Meromorphismus λ von K ist durch Angabe der $\lambda\mathfrak{p}$ für unendlich viele $\mathfrak{p}$ eindeutig festgelegt.

Seien nämlich λ_1, λ_2 zwei Meromorphismen von K mit

$$\lambda_1\mathfrak{p} = \lambda_2\mathfrak{p}$$

für unendlich viele $\mathfrak{p}$. Dann hat man für jedes z aus K

$$z(\lambda_1\mathfrak{p}) = z(\lambda_2\mathfrak{p}),$$

also

$$(z\lambda_1)\mathfrak{p} = (z\lambda_2)\mathfrak{p}.$$

Daher ist

$$(z\lambda_1 - z\lambda_2)\mathfrak{p} = 0$$

jedenfalls für alle diejenigen unserer $\mathfrak{p}$, die von den endlich vielen Nennerprimteilern von $z\lambda_1, z\lambda_2$ verschieden sind. Alle diese unendlich vielen $\mathfrak{p}$ sind also Zählerprimteiler von $z\lambda_1 - z\lambda_2$, und das geht nur für

$$z\lambda_1 - z\lambda_2 = 0.$$

Es folgt also

$$z\lambda_1 = z\lambda_2 \quad \text{für jedes } z \text{ aus } K,$$

d. h.

$$\lambda_1 = \lambda_2 .$$

Wir haben damit insbesondere die in § 1 vorangestellte Tatsache über Automorphismen auf etwas andere Art bewiesen; auch die dort anschließend angegebene Tatsache für Teilkörper kann nach diesem modifizierten Schema bewiesen werden.

6. Wir wollen noch die *Struktur von* $K/K\mu$ für einen eigentlichen Meromorphismus μ untersuchen, den wir dabei ohne Einschränkung als normiert annehmen dürfen.

Die beim Homomorphismus $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ von D_0 in $\mathfrak{o}$ abgebildeten Primdivisoren von K bilden eine Untergruppe H_μ von D_0. Es sind das die Primdivisoren $\mathfrak{o}^{(i)}$ mit

$$\mu\mathfrak{o}^{(i)} = \mathfrak{o}, \quad \text{oder also} \quad N_\mu\mathfrak{o}^{(i)} = \mathfrak{o}\mu,$$

somit gerade die Primteiler in K des Primdivisors $\mathfrak{o}\mu$ von $K\mu$. Für irgendeinen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K bilden dann die Primdivisoren $\mathfrak{p}^{(i)}$ mit

$$\mu\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}, \quad \text{oder also} \quad N_\mu\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}\mu,$$

d. h. die Primteiler in K des Primdivisors $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu$, eine Nebengruppe nach H_μ in D_0:

$$\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}^{(0)} + \mathfrak{o}^{(i)}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{o}^{(0)} = \mathfrak{o}.$$

Daß H_μ von endlicher Ordnung m ist, ist natürlich auch schon auf Grund der zuvor bewiesenen Festlegung von μ durch die $\mu\mathfrak{p}$ klar.

Für die endlich-algebraische Erweiterung $K/K\mu$ vom Grade $N(\mu)$ existiert nun ein eindeutig bestimmter Teiler p^e von $N(\mu)$ (für $p = 0$ der Teiler $p^0 = 1$) derart, daß

$$K \geqq K^{p^e} \geqq K\mu$$

und

$$K^{p^e}/K\mu \text{ separabel}$$

ist [4]). Wir nennen

$$J(\mu) = p^e$$

den *Inseparabilitätsexponenten* von μ und

$$N_0(\mu) = [K^{p^e} : K\mu]$$

die *reduzierte Norm* von μ, und haben dann die Zerlegung

$$N(\mu) = J(\mu)N_0(\mu).$$

Da $K\mu$ zu K isomorph und K^{p^e} zu K absolut-isomorph ist, haben $K\mu$ und K^{p^e} beide das Geschlecht 1. Aus der Formel für das Relativgeschlecht [5]) folgt daher, daß

$$K^{p^e}/K\mu \text{ unverzweigt}$$

---

[4]) Siehe dazu die obige Fußnote 2.

[5]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934), 43. Ganz analog wie im dortigen Spezialfall beweist man allgemein: Sind K, K_0 algebraische Funktionenkörper über demselben vollkommenen Konstantenkörper k, mit den Geschlechtern g, g_0, ist ferner $K \geqq K_0$ und $n = [K : K_0]$, sowie d der Grad der Differente von K/K_0, so gilt:

$$g = ng_0 + \gamma,$$

$$\gamma = \frac{d}{2} - (n-1) \text{ (Relativgeschlecht von } K/K_0).$$

ist. Daraus ergibt sich für die Primzerlegung für $K/K\mu$ das Gesetz

$$\mathfrak{p}\mu = \Big(\prod_{i=0}^{m-1} \mathfrak{p}^{(i)}\Big)^{p^e}, \qquad m = N_0(\mu), \qquad p^e = J(\mu),$$

wo die $\mathfrak{p}^{(i)}$ jeweils eine Nebengruppe nach H_μ in $D_\mathfrak{o}$ durchlaufen. Insbesondere haben wir daher:

Die reduzierte Norm $N_0(\mu)$ ist gleich der Ordnung von H_μ, also gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ in der Gruppe $D_\mathfrak{o}$.

Ferner ergibt sich hieraus, daß auch die beiden Komponenten $J(\mu)$ und $N_0(\mu)$ von $N(\mu)$ multiplikativ sind:

$$J(\mu\mu') = J(\mu)\,J(\mu'), \qquad N_0(\mu\mu') = N_0(\mu)\,N_0(\mu').$$

Dies stimmt auch für μ oder $\mu' = 0$, wenn man die formale Festsetzung $N(0) = 0$ durch die formalen Festsetzungen $J(0) = 0$ und $N_0(0) = 0$ ergänzt.

Auf Grund des in § 1 besprochenen Isomorphismus $\mathfrak{a} \longleftrightarrow \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ zwischen $D_\mathfrak{o}$ und der Translationsautomorphismengruppe $\mathfrak{T}$ entspricht der Untergruppe H_μ von $D_\mathfrak{o}$ eine Untergruppe $\mathfrak{G}_\mu$ von $\mathfrak{T}$ bestehend aus den Translationsautomorphismen $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}^{(i)}}$. Bei diesen Automorphismen bleiben alle Primdivisoren $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu$ fest, denn ihre Primfaktoren $\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}^{(0)} + \mathfrak{o}^{(i)}$ werden nur permutiert; wie in § 1 festgestellt, bleibt daher der Körper $K\mu$ elementweise fest. Damit sind für $K/K\mu$ ebenso viele verschiedene Automorphismen festgestellt, wie der reduzierte Grad m beträgt. Daher gilt:

$K/K\mu$ ist galoissch mit der zu H_μ isomorphen abelschen Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ als reduzierter Galoisgruppe.

Bekanntlich kann man $K/K\mu$ auch so aufbauen:

$$K \geqq (K\mu)^{p^{-e}} \geqq K\mu, \qquad K/(K\mu)^{p^{-e}} \text{ separabel.}$$

Dabei ist dann auch wieder $K/K(\mu)^{p^{-e}}$ unverzweigt.

§ 3. Das Additionstheorem für die Meromorphismen von K.

1. Sei $\mathfrak{o}$ ein fester Primdivisor von K. Nach dem Riemann-Rochschen Satz existiert eine k-Basis $1, x, y$ der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{o}^3}$ in K derart, daß x, y die (genauen) Nenner $\mathfrak{o}^2, \mathfrak{o}^3$ haben. Es bilden dann für jedes $n \geqq 0$ die Potenzprodukte

$$x^i y^j \text{ mit } 0 \leqq i, \quad 0 \leqq j \leqq 1, \quad 2i + 3j \leqq n$$

eine Basis der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{o}^n}$ in K.

Daraus ergibt sich sofort:

$K/k(x)$ ist vom Grade 2 und separabel;

$K = k(x, y)$ mit einer irreduziblen Grundgleichung $f(x, y) = 0$ von den Graden 3, 2 in x, y;

$J_\mathfrak{o} = k[x, y] = k[x] + k[x]y = J_x$,

d. h. der Integritätsbereich $J_\mathfrak{o}$ der höchstens für $\mathfrak{o}$ gebrochenen Elemente aus K fällt mit dem Integritätsbereich J_x der in bezug auf $k[x]$ ganz-algebraischen Elemente aus K zusammen, stellt sich als der Polynombereich in x, y über k dar und hat über $k[x]$ die Basis $1, y$.

Wir arbeiten im folgenden mit einer festen Basis $1, x, y$ und der zugehörigen Grundgleichung $f(x, y) = 0$. Wir nennen das eine *normierte Erzeugung* von K. Unsere Fest-

stellungen werden aber durchweg invariant gegenüber den linearen Substitutionen

$$\begin{aligned} x_0 &= a_{00} \\ x_1 &= a_{10} + a_{11}x \qquad\qquad (a_{00}a_{11}a_{22} \neq 0) \\ x_2 &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

sein, die die feste Normalbasis 1, x, y der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{o}^3}$ in irgendeine andere Normalbasis x_0, x_1, x_2 dieser ganzen Multipla überführen.

Auf Grund der Translationsautomorphismen $\tau_{\mathfrak{o},a}$ ist ferner auch die Auszeichnung von $\mathfrak{o}$ unwesentlich.

Jedem Primdivisor $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ *entspricht eindeutig eine konstante Lösung der Grundgleichung, nämlich die Lösung* $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p})$.

Hiervon gilt auch die Umkehrung:

Jeder konstanten Lösung (a, b) *der Grundgleichung entspricht eindeutig ein Primdivisor* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ *derart, daß* $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (a, b)$ *ist.*

Durch $(x, y) \to (a, b)$ wird nämlich ein Homomorphismus des Integritätsbereichs $k[x, y]$ auf den Körper k festgelegt. Die dabei annullierten Elemente bilden ein Primideal $[\mathfrak{p}]$ von $k[x, y]$. Wegen $k[x, y] = J_x = J_{\mathfrak{o}}$ entsprechen aber bekanntlich die Primideale $[\mathfrak{p}]$ von J_x umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ von K derart, daß $[\mathfrak{p}]$ die Gesamtheit der Elemente $\equiv 0$ mod. $\mathfrak{p}$ aus $k[x, y]$ ist. Somit existiert ein und nur ein $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ mit $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (a, b)$.

Dem Primdivisor $\mathfrak{o}$ hätte man, entsprechend der früheren formalen Festsetzung $z\mathfrak{p} = \infty$, falls z gebrochen für $\mathfrak{p}$, die uneigentliche Lösung

$$(x\mathfrak{o}, y\mathfrak{o}) = (\infty, \infty)$$

zuzuordnen. Wir werden das aber gar nicht brauchen.

2. Die Additionsrelation $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$ in der Gruppe $D_{\mathfrak{o}}$ läßt sich durch eine Relation zwischen den Grundgleichungslösungen $(x\mathfrak{p}_i, y\mathfrak{p}_i)$ ausdrücken, die den Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$ zugeordnet sind. Aus Symmetriegründen legen wir besser die Relation

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o},$$

zugrunde. Wir haben dabei einige Fälle zu unterscheiden, je nach den Verschiedenheiten oder Gleichheiten der $\mathfrak{p}_i$ untereinander und mit $\mathfrak{o}$.

a) (*Hauptfall*) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ *untereinander und von* $\mathfrak{o}$ *verschieden.* Dann ist die Relation $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$ gleichbedeutend mit der Determinantenrelation

$$\begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 & y\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 & y\mathfrak{p}_2 \\ 1 & x\mathfrak{p}_3 & y\mathfrak{p}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Denn aus dieser folgt die Existenz eines nicht verschwindenden ganzen Multiplums

$$z = \gamma + \alpha x + \beta y$$

von $\frac{1}{\mathfrak{o}^3}$ in K mit

$$z\mathfrak{p}_1 = 0, \quad z\mathfrak{p}_2 = 0, \quad z\mathfrak{p}_3 = 0,$$

also

$$z \cong \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}^3},$$

und daher

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o};$$

und umgekehrt. — Entsprechend ergibt sich, daß die Relation $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$ in den weiteren Spezialfällen gleichbedeutend mit der jeweils angegebenen Determinantenrelation ist; bei der Angabe dieser Spezialfälle genügt es, die vorausgesetzten Gleichheiten zu nennen, während im übrigen die Verschiedenheiten des Hauptfalles bestehen sollen.

b) $\underline{\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3}$. $\begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 & y\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 & y\mathfrak{p}_2 \\ 0 & (dx)\mathfrak{p}_2 & (dy)\mathfrak{p}_2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 & y\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 & y\mathfrak{p}_2 \\ 0 & f_y\mathfrak{p}_2 & -f_x\mathfrak{p}_2 \end{vmatrix} = 0.$

c) $\underline{\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}}$. $\begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 \end{vmatrix} = 0.$

Für die noch spezielleren Fälle $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$ (also $3\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$) und $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$ (also $2\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$) brauchen wir die entsprechenden Determinantenrelationen (in H I gegeben) hier nicht. Abgesehen von Vertauschungen bleibt dann nur noch der triviale Fall $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$.

3. Wir betrachten jetzt den durch dieselbe Grundgleichung $f(X, Y) = 0$, aber über K als Konstantenkörper, definierten algebraischen Funktionenkörper $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = K(X, Y) \quad \text{mit} \quad f(X, Y) = 0.$$

Daß der neue Konstantenkörper K nicht algebraisch-abgeschlossen ist, macht für die Anwendung unserer Theorie auf $\mathfrak{K}/K$ statt K/k nur den Unterschied, daß wir uns durchweg auf Primdivisoren ersten Grades zu beschränken haben. Daß K für $p \neq 0$ nicht einmal vollkommen ist, macht gar nichts aus; die bösartigen Abweichungen der Theorie bei unvollkommenem Konstantenkörper treten hier deshalb nicht auf, weil die Grundgleichung Koeffizienten in k (nicht nur in K) hat.

Aus der zuvor entwickelten Charakterisierung der Primdivisoren durch konstante Grundgleichungslösungen ergibt sich hiernach ohne weiteres:

Zwischen den Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ und den Meromorphismen λ von K besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, auf Grund der Relation

$$(X\mathfrak{P}, Y\mathfrak{P}) = (x\lambda, y\lambda).$$

Dabei sind den Primdivisoren $\mathfrak{P}$, für die die Reste von X, Y bereits in k liegen, die uneigentlichen Meromorphismen λ zugeordnet, und insbesondere dem Nennerprimdivisor $\mathfrak{D}$ von X, Y der Nullmeromorphismus 0.

Wir definieren auf Grund dieser Zuordnung die *Summe* $\lambda_1 + \lambda_2$ zweier Meromorphismen von K als denjenigen Meromorphismus von K, der der Summe $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ in der Gruppe $\mathfrak{D}_\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{K}$ zugeordnet ist. Die Gesamtheit der Meromorphismen von K wird so zu einer mit $\mathfrak{D}_\mathfrak{D}$ (also mit der Gruppe $\mathfrak{D}$ der Divisorenklassen nullten Grades von $\mathfrak{K}$) isomorphen additiven abelschen Gruppe Λ.

4. Das *Additionstheorem* der klassischen Theorie formuliert sich bei dieser Einkleidung folgendermaßen:

Die Addition der Meromorphismen λ liefert die Addition der zugeordneten linearen Substitutionen $\lambda\mathfrak{p}$:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p} = \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p}\,.^{6})$$

Zum Beweis legen wir besser die symmetrische Fassung zugrunde:

$$\text{Aus} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{folgt} \quad \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} + \lambda_3\mathfrak{p} = 0\,.$$

---

[6]) Diese Formulierung entspricht einer Kombination des Homomorphiesatzes und des Klassensatzes in der Terminologie meiner Arbeit in den Abh. Math. Sem. Hamburg **10**. Ich bin hier den dort im Anschluß an diese beiden Sätze skizzierten Weg gegangen.

Seien $\mathfrak{P}_i$ die den λ_i zugeordneten Primdivisoren ersten Grades von $\mathfrak{K}$, also nach Voraussetzung

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{O},$$

und sei $\lambda_i \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ gesetzt, so daß also

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$$

behauptet wird.

Wir nehmen die Spezialfälle vorweg, wo die Anzahl der untereinander und von $\mathfrak{O}$ verschiedenen unter den $\mathfrak{P}_i$ gleich 0 oder 1 ist.

Sind alle $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{O}$, also alle $\lambda_i = 0$, so sind alle $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}$, also stimmt dann die Behauptung.

Ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3$, also $3\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{O}$, oder $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{O}$, also $2\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{O}$, so ist λ_1 nach H I uneigentlich, einem Primdivisor $\mathfrak{p}_1^*$ mit $3\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{o}$ oder $2\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{o}$ entsprechend. Da für diesen dann $\mathfrak{p}_1 = \lambda_1 \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^*$ gilt, stimmt auch hier die Behauptung $3\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$ oder $2\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$.

Liege jetzt einer der obigen Fälle a)—c) für die $\mathfrak{P}_i$ vor. Dann besteht also die entsprechende Determinantenrelation für die $X\mathfrak{P}_i$, $Y\mathfrak{P}_i$. Auf Grund des Zusammenhangs der $\mathfrak{P}_i$ mit den λ_i hat man

$$(X\mathfrak{P}_i, Y\mathfrak{P}_i) = (x\lambda_i, y\lambda_i)$$

und weiter auch

$$(f_y(X, Y)\mathfrak{P}_i, -f_x(X, Y)\mathfrak{P}_i) = (f_y(x, y)\lambda_i, -f_x(x, y)\lambda_i).$$

Demgemäß kann in der Determinantenrelation $x\lambda_i$, $y\lambda_i$ für $X\mathfrak{P}_i$, $Y\mathfrak{P}_i$ geschrieben werden. Wir gehen dann in dieser Relation weiter zu den konstanten Resten mod. $\mathfrak{p}$ über, unter Beachtung der Regel $(z\lambda_i)\mathfrak{p} = z(\lambda_i\mathfrak{p}) = z\mathfrak{p}_i$.

Dabei beschränken wir uns auf solche $\mathfrak{p}$, für welche die $\mathfrak{p}_i$ genau derselben Voraussetzung a)—c) wie die $\mathfrak{P}_i$ unterliegen (keiner spezielleren). Ausgenommen werden also genau diejenigen $\mathfrak{p}$, für welche entweder eine Relation

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o} \text{ bei } \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{O}, \text{ d. h. } \lambda_i\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \text{ bei } \lambda_i \neq 0$$

oder eine Relation

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j \text{ bei } \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_j, \text{ d. h. } \lambda_i\mathfrak{p} = \lambda_j\mathfrak{p} \text{ bei } \lambda_i \neq \lambda_j$$

besteht. Die Ausnahme der ersteren Fälle stellt gleichzeitig sicher, daß kein in der Determinantenrelation auftretender konstanter Rest das Symbol ∞ wird.

Wir erhalten dann genau die obige Determinantenrelation a)—c) für die $x\mathfrak{p}_i$, $y\mathfrak{p}_i$ mit der zugehörigen Voraussetzung für die $\mathfrak{p}_i$. Daraus ergibt sich die Behauptung für alle $\mathfrak{p}$ bis auf die genannten Ausnahmen.

Die Anzahl dieser Ausnahmen ist nun nach der oben bewiesenen Festlegung eines Meromorphismus λ durch die zugeordnete lineare Substitution $\lambda\mathfrak{p}$ jedenfalls endlich. Um die Richtigkeit der Behauptung auch für sie einzusehen, gehen wir folgendermaßen vor:

Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda_3 = 0$, also $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Nach dem Bewiesenen gilt dann $\lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für fast alle $\mathfrak{p}$. Anders gesagt, für jeden Meromorphismus λ gilt

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = -(\lambda\mathfrak{p}) \text{ für fast alle } \mathfrak{p}.$$

Nun ist nach unseren Rechenregeln

$$-(\lambda\mathfrak{p}) = (\lambda\mathfrak{p})\sigma_0 = \sigma_0(\lambda\mathfrak{p}) = (\sigma_0\lambda)\mathfrak{p}.$$

Damit schreibt sich die letzte Aussage als

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = (\sigma_0\lambda)\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p}.$$

Daraus folgt die Meromorphismengleichung

$$-\lambda = \sigma_0\lambda,$$

und diese liefert

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = (\sigma_0\lambda)\mathfrak{p} \quad \text{für alle } \mathfrak{p},$$

also

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = -(\lambda\mathfrak{p}) \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Damit ist zunächst die ausnahmslose Gültigkeit von $\lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ bewiesen.

Ferner ergibt sich daraus, daß die Behauptung im allgemeinen Fall $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ gleichwertig in der Form

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p} = \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p}$$

ausgedrückt werden kann; denn man hat ja jetzt

$$-(\lambda_3\mathfrak{p}) = (-\lambda_3)\mathfrak{p} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p}.$$

Schließlich ergibt sich die Richtigkeit der Umkehrung:

Aus $\lambda_1'\mathfrak{p} + \lambda_2'\mathfrak{p} + \lambda_3'\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für fast alle $\mathfrak{p}$ folgt $\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' = 0$. Denn einerseits hat man nach Voraussetzung

$$(-\lambda_3')\mathfrak{p} = \lambda_1'\mathfrak{p} + \lambda_2'\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

und andererseits nach dem Bewiesenen auch

$$(\lambda_1' + \lambda_2')\mathfrak{p} = \lambda_1'\mathfrak{p} + \lambda_2'\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

zusammengenommen also

$$(-\lambda_3')\mathfrak{p} = (\lambda_1' + \lambda_2')\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

was die Meromorphismengleichung

$$-\lambda_3' = \lambda_1' + \lambda_2'$$

zur Folge hat.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur Beseitigung der endlich vielen Ausnahmen im allgemeinen Fall $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Sei dazu $n \not\equiv 0 \bmod. p$ eine natürliche Zahl. Nach H I ist dann die Gruppe der Primdivisoren $\mathfrak{q}$ mit $n\mathfrak{q} = \mathfrak{o}$ vom Typus (n, n). Es existieren also zwei unabhängige $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ von der Ordnung n; setzt man $\mathfrak{q}_3 = -(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)$, so ist

$$\sum_i \mathfrak{q}_i = \mathfrak{o},$$

und es sind durchweg

$$\mathfrak{q}_i \text{ und } \mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}_j \ (i \neq j) \text{ von der Ordnung } n.$$

Mit diesen $\mathfrak{q}_i$ bilden wir die Meromorphismen

$$\lambda_i' = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{q}_i}\lambda_i,$$

für die also

$$\lambda_i'\mathfrak{p} = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{q}_i}(\lambda_i\mathfrak{p}) = (\lambda_i\mathfrak{p})\tau_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{o}} = \lambda_i\mathfrak{p} - \mathfrak{q}_i$$

ist. Nach Konstruktion ist dann

$$\sum_i \lambda_i'\mathfrak{p} = \sum_i \lambda_i\mathfrak{p}.$$

Daraus folgt zunächst

$$\sum_i \lambda_i' \mathfrak{p} = \mathfrak{o} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

also nach dem zuvor Bewiesenen auch

$$\sum_i \lambda_i' = 0.$$

Weiter folgt dann, daß die Behauptung $\sum_i \lambda_i \mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ auch für alle diejenigen $\mathfrak{p}$ stimmt, die keine Ausnahmen für die λ_i' sind. Unser Beweis wird also erbracht sein, wenn wir gezeigt haben, daß sich n so wählen läßt, daß die für die λ_i auszunehmenden $\mathfrak{p}$ keine Ausnahmen für die λ_i' sind. Dies erreichen wir sicher, wenn wir dafür sorgen, daß für jedes der endlich vielen bei den λ_i auszunehmenden $\mathfrak{p}$ durchweg

$$\lambda_i' \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_i \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i$$

und für $i \neq j$ durchweg

$$\lambda_i' \mathfrak{p} \neq \lambda_j' \mathfrak{p}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_i \mathfrak{p} - \lambda_j \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}_j$$

gilt. Wählt man nun n größer als die sämtlichen endlich vielen Ordnungen der $\lambda_i \mathfrak{p}$ und $\lambda_i \mathfrak{p} - \lambda_j \mathfrak{p}$ (soweit diese überhaupt endlich sind), so ist dies auf Grund der Wahl der $\mathfrak{q}_i$ erfüllt.

Damit ist das Additionstheorem in obiger Formulierung bewiesen.

Als Folgerung sei noch angeführt: Ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

und sind

$$\lambda_i = \tau_{\mathfrak{a}_i, \mathfrak{o}} \mu_i$$

die zugehörigen eindeutigen Zerlegungen, so ist auch

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

und

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Denn für die zugeordneten linearen Substitutionen hat man nach dem Additionstheorem

$$\mathfrak{o} = \left(\sum_i \lambda_i\right) \mathfrak{p} = \sum_i (\lambda_i \mathfrak{p}) = \sum_i (\mu_i \mathfrak{p}) + \sum_i \mathfrak{a}_i = \left(\sum_i \mu_i\right) \mathfrak{p} + \sum_i \mathfrak{a}_i .$$

Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ ergibt das die erste Behauptung. Dann folgt die zweite Behauptung wegen der Festlegung jedes Meromorphismus durch seine lineare Substitution.

5. Aus dem Additionstheorem folgt weiter, daß mit μ auch $-\mu$ normiert ist und mit μ_1, μ_2 auch $\mu_1 + \mu_2$ normiert ist. Also:

Das multiplikativ abgeschlossene System M *der normierten Meromorphismen ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe.*

Wir beweisen ferner die Gültigkeit der *Distributivgesetze*

$$(\mu_1 + \mu_2)\mu = \mu_1 \mu + \mu_2 \mu$$
$$\mu(\mu_1 + \mu_2) = \mu \mu_1 + \mu \mu_2$$

in M.

Es genügt dazu, die Gleichheit der beiden Seiten zugeordneten linearen Substitutionen zu zeigen. In der Tat ist auf Grund unserer Rechenregeln (unter Weglassung der nach dem Bisherigen entbehrlichen Assoziativklammern)

$$(\mu_1 + \mu_2)\mu\mathfrak{p} = \mu_1 \mu\mathfrak{p} + \mu_2 \mu\mathfrak{p} = (\mu_1 \mu + \mu_2 \mu)\mathfrak{p}$$
$$\mu(\mu_1 + \mu_2)\mathfrak{p} = \mu(\mu_1 \mathfrak{p} + \mu_2 \mathfrak{p}) = \mu\mu_1 \mathfrak{p} + \mu\mu_2 \mathfrak{p} = (\mu\mu_1 + \mu\mu_2)\mathfrak{p}.$$

Das erste Distributivgesetz gilt übrigens sogar ohne die Beschränkung auf normierte Meromorphismen, während im zweiten jedenfalls μ normiert sein muß.

Wir haben damit:

Das System M *der normierten Meromorphismen ist auf Grund der gegebenen Definitionen von Produkt und Summe ein Ring.*

Nullelement dieses Ringes M ist, wie hinsichtlich der Multiplikation bereits in § 2 festgestellt wurde und hinsichtlich der Addition unmittelbar ersichtlich ist, der einzige uneigentliche normierte Meromorphismus 0, der dem Bezugsprimdivisor $\mathfrak{o}$ zugeordnet ist. In § 2 wurde aus dem Normenproduktsatz gefolgert:

Der Ring M *besitzt keine echten Nullteiler.*

Der Ring M besitzt ferner ein *Einselement* 1, den identischen Automorphismus von K, und damit dann auch dessen natürliche Vielfache n, mit dem zugeordneten Homomorphismus

$$n\mathfrak{p} = \mathfrak{p} + \cdots + \mathfrak{p} \quad (n\text{-mal})$$

in der Gruppe $D_{\mathfrak{o}}$, und ihre Entgegengesetzten $-n$. Wir zeigen:

Der Ring M *hat die Charakteristik* 0.

Sei nämlich n eine natürliche Zahl und μ ein normierter Meromorphismus. Nach dem Additionstheorem und wegen der Homomorphieeigenschaft von μ gilt dann durchweg

$$(n\mu)\mathfrak{p} = n(\mu\mathfrak{p}) = \mu(n\mathfrak{p}).$$

Ist also $n\mu = 0$, d. h. $(n\mu)\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, so folgt durchweg

$$\mu(n\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}.$$

Nach H I fallen nun bei der homomorphen Abbildung $\mathfrak{p} \to n\mathfrak{p}$ der Gruppe $D_{\mathfrak{o}}$ immer höchstens n^2 Primdivisoren zusammen. Daher folgt aus der letzten Relation weiter, daß

$$\mu\mathfrak{q} = \mathfrak{o}$$

für endlich viele Primdivisoren $\mathfrak{q}$ gilt. Dann muß aber $\mu = 0$ sein. Somit ist für jedes natürliche n in der Tat

$$n\mu \neq 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq 0.$$

Nach § 1 gilt schließlich:

Der Ring M *besitzt nur endlich viele Einheiten.*

Hiervon werden wir aber, wie schon gesagt, keinen Gebrauch zu machen haben.

Es sei noch bemerkt, daß die Struktur des Ringes $\mathsf{M} = \mathsf{M}_{\mathfrak{o}}$ nicht von der Wahl des Bezugsprimdivisors $\mathfrak{o}$ abhängt, also eine Invariante von K ist. In der Tat hat man ohne weiteres die Transformationsbeziehung

$$\mathsf{M}_{\mathfrak{a}} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\, \mathsf{M}_{\mathfrak{o}}\, \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,.$$

6. Der Ring M enthält jedenfalls den Integritätsbereich Γ der *ganzrationalzahligen Meromorphismen* m. Ob weitere normierte Meromorphismen vorhanden sind, hängt von der Struktur von k ab. Für den klassischen Fall — k der Körper aller komplexen Zahlen — weiß man aus analytischer Quelle, daß K dann und nur dann nicht ganzrationalzahlige normierte Meromorphismen, also echte komplexe Multiplikationen besitzt, wenn das Periodenverhältnis imaginär-quadratisch ist, und daß dann die normierten Meromorphismen eine Ordnung im Körper des Periodenverhältnisses bilden. Der Formalismus der klassischen Theorie ergibt sich aus unserer, wenn man unseren unbestimmten Primdivisor $\mathfrak{p}$ als variablen Punkt des Gebildes deutet und demgemäß durch den variablen Punkt u der universellen Überlagerungsfläche, reduziert nach dem Modul der Perioden, ersetzt. Dann entsprechen unsere linearen Substitutionen $\lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ den linearen Substitutionen $\lambda(u) = \mu u + \alpha$ in der u-Ebene.

§ 4. Das Additionstheorem für das ganze Differential von K.

1. Für das Folgende ist das Verhalten des wesentlich einzigen *ganzen Differentials* du von K bei den Meromorphismen von K wichtig.

Ist $K = k(x, y)$ *mit* $f(x, y) = 0$ *eine normierte Erzeugung von* K, *so ist*

$$du = \frac{dx}{f_y(x, y)} = -\frac{dy}{f_x(x, y)}$$

das wesentlich einzige ganze Differential von K; *der zugeordnete Divisor ist*

$$du \cong 1.$$

Zum Beweis betrachten wir K als separabel-algebraische Erweiterung vom Grade 2 über $k(x)$. Als Divisor ist

$$f_y(x, y) \cong y - y',$$

wo y' die zu y konjugierte über $k(x)$ bezeichnet. Es kommt also auf den Nachweis der Divisorengleichung

$$dx \cong y - y'$$

an. Weil x den Nenner $\mathfrak{o}^2$ hat, ist

$$dx \cong \frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{o}^4},$$

wo $\mathfrak{d}_x$ den Differentendivisor für $K/k(x)$ bezeichnet. Dieser kann aus der Elementdifferente $y - y'$ berechnet werden. Wie bereits in § 2 festgestellt wurde, hat $J_x = k[x, y] = J_0$ über $k[x]$ die Basis 1, y. Daher stimmt für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ der Beitrag zu $\mathfrak{d}_x$ mit dem Beitrag zu $y - y'$ überein. Es bleibt also zu zeigen, daß für $\mathfrak{o}$ der Beitrag zu $\frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{o}^4}$ mit dem Beitrag zu $y - y'$ übereinstimmt. Nun ist $\frac{x}{y}$ Primelement für $\mathfrak{o}$; der $\mathfrak{o}$-Beitrag zu $\mathfrak{d}_x$ ist daher gleich dem $\mathfrak{o}$-Beitrag zur Differente $\frac{x}{y} - \frac{x}{y'} = -x\frac{y - y'}{yy'}$. Dieser $\mathfrak{o}$-Beitrag ist aber ersichtlich um den Faktor $\frac{1}{\mathfrak{o}^2}\mathfrak{o}^3\mathfrak{o}^3 = \mathfrak{o}^4$ von dem $\mathfrak{o}$-Beitrag zu $y - y'$ unterschieden.

2. Als *Bild des ganzen Differentials* du *von* K *bei einem Meromorphismus* λ *von* K definieren wir:

$$(du)\lambda = \frac{d(x\lambda)}{f_y(x\lambda, y\lambda)}, \quad \text{wenn } \lambda \text{ eigentlich},$$

$$(du)\lambda = 0, \quad \text{wenn } \lambda \text{ uneigentlich}.$$

Bei der Betrachtung des hierdurch für eigentliches λ definierten Differentials $(du)\lambda$ müssen wir unterscheiden, ob wir $(du)\lambda$ als Differential von $K\lambda$ oder als Differential von K ansehen.

Als Differential von $K\lambda$ ist $(du)\lambda$ das entsprechend zu du gebildete ganze Differential von $K\lambda$, insbesondere also

$$(du)\lambda \cong 1 \text{ in } K\lambda.$$

Als Differential von K ist

$$(du)\lambda = 0 \text{ in } K, \quad \text{wenn } K/K\lambda \text{ inseparabel},$$
$$(du)\lambda \neq 0 \text{ in } K, \quad \text{wenn } K/K\lambda \text{ separabel}.$$

Im letzten Fall ist die Unterscheidung zwischen der Betrachtung in $K\lambda$ oder K unwesentlich. Auf Grund der in § 2 festgestellten Unverzweigtheit von $K/K\lambda$ stimmen dann nämlich die lokalen Entwicklungen von $(du)\lambda$ in $K\lambda$ mit denen in K bei Wahl der Primelemente innerhalb $K\lambda$ überein; insbesondere ist also auch

$$(du)\lambda \cong 1 \text{ in } K.$$

Für uneigentliches λ ist $K\lambda = k$, so daß von Differentialen von $K\lambda$ nicht die Rede sein kann. Als Differential von K ist $d(x\lambda) = 0$ jedenfalls dann, wenn $x\lambda \neq \infty$, d. h. $\lambda \neq 0$ ist. Wir haben demgemäß $(du)\lambda = 0$ definiert, und zwar ausdrücklich auch für den Fall $\lambda = 0$, sowie für den Fall, daß $\lambda \neq 0$ uneigentlich ist und die bei eigentlichem λ gegebene Definitionsformel dadurch versagt, daß auch ihr Nenner $f_y(x\lambda, y\lambda) = 0$ wird.

Hiernach gilt in jedem Falle eine Relation

$$(du)\lambda = c_\lambda du \text{ in } K,$$

mit einer durch λ bestimmten Konstanten c_λ, und es ist

$c_\lambda \neq 0$, wenn $K/K\lambda$ separabel-algebraisch,

$c_\lambda = 0$, wenn $K/K\lambda$ inseparabel-algebraisch oder transzendent.

Aus der Definition des Meromorphismenproduktes durch Nacheinanderausführung ergibt sich:

Der Multiplikation der Meromorphismen λ entspricht die Multiplikation der Faktoren c_λ:

$$c_{\lambda\lambda'} = c_\lambda c_{\lambda'}.$$

Aus

$$(du)\lambda = c_\lambda du \text{ in } K$$

folgt nämlich durch Anwendung von λ'

$$\begin{aligned}(du)\lambda\lambda' &= c_\lambda (du)\lambda' \text{ in } K\lambda' \\ &= c_\lambda c_{\lambda'} du \text{ in } K.\end{aligned}$$

3. Wir beweisen jetzt *das Additionstheorem für das ganze Differential*:

Der Addition der Meromorphismen λ entspricht die Addition der zugeordneten ganzen Differentiale $(du)\lambda$ als Differentiale von K:

$$(du)(\lambda_1 + \lambda_2) = (du)\lambda_1 + (du)\lambda_2 \text{ in } K,$$

oder also

$$c_{\lambda_1+\lambda_2} = c_{\lambda_1} + c_{\lambda_2}.$$

Zum Beweis legen wir wieder besser die symmetrische Fassung zugrunde:

Aus $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ folgt $(du)\lambda_1 + (du)\lambda_2 + (du)\lambda_3 = 0$ in K,

also

$$c_{\lambda_1} + c_{\lambda_2} + c_{\lambda_3} = 0.$$

Wir zeigen zunächst, daß es für $(du)\lambda$ und somit c_λ nur auf den normierten Bestandteil μ von λ ankommt. Es gilt nämlich:

du ist bei den Translationsautomorphismen τ invariant:

$$(du)\tau = du, \quad d.\,h. \quad c_\tau = 1.$$

Auf Grund der in § 1 gegebenen Konstruktion dieser Translationsautomorphismen als Produkte

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}}\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$$

zweier Spiegelungsautomorphismen genügt es dazu zu zeigen:

du bekommt bei den Spiegelungsautomorphismen σ den Faktor -1:

$$(du)\sigma = -du, \quad d.\,h. \quad c_\sigma = -1.$$

Jeder Spiegelungsautomorphismus σ läßt sich nach § 1 in der Form $\sigma = \sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ darstellen und ist dann der nicht identische Automorphismus von $K/k(z)$, wo z ein nicht-konstantes ganzes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in K ist. Das mit diesem z gebildete Differential $z\,du$ von K hat genau zwei von Null verschiedene Residuen, nämlich bei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und diese sind nach dem Residuensatz [7]) entgegengesetzt, also etwa (bei geeigneter Normierung von z)

$$\varrho_{\mathfrak{a}}(z\,du) = +1, \quad \varrho_{\mathfrak{b}}(z\,du) = -1.$$

Wendet man hierauf σ an und beachtet

$$\mathfrak{a}\sigma = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b}\sigma = \mathfrak{a}, \quad z\sigma = z, \quad (du)\sigma = c_\sigma\,du,$$

so erhält man

$$c_\sigma \varrho_{\mathfrak{b}}(z\,du) = +1, \quad c_\sigma \varrho_{\mathfrak{a}}(z\,du) = -1,$$

also in der Tat

$$c_\sigma = -1.$$

Hat λ die eindeutige Zerlegung

$$\lambda = \tau\mu,$$

so gilt hiernach

$$(du)\,\lambda = (du)\,\tau\mu = (du)\,\mu,$$

und daher

$$c_\lambda = c_\mu.$$

$(du)\,\lambda$ und c_λ hängen demnach in der Tat nur von dem normierten Bestandteil μ von λ ab.

Dies machen wir uns für unseren Beweis des oben ausgesprochenen Additionstheorems für das ganze Differential zu Nutze, um jegliche Spezialfälle der beim Beweis des Additionstheorems in § 3 auftretenden Art auszuschließen. Wir ersetzen nämlich die gegebenen λ_i mit $\sum_i \lambda_i = 0$ durch abgeänderte $\lambda_i' = \tau_{\mathfrak{a}_i,\mathfrak{o}}\lambda_i$. Nach dem Additionstheorem erfüllen auch diese die Relation $\sum_i \lambda_i' = 0$, wenn nur über die $\mathfrak{a}_i$ so verfügt wird, daß $\sum_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$ ist. Offenbar lassen sich die Primdivisoren $\mathfrak{a}_i$ mit $\sum_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$ stets (auf unendlich viele Arten) so bestimmen, daß die λ_i' untereinander und von 0 verschieden sind. Wir dürfen dies ohne Einschränkung bereits für die λ_i voraussetzen.

Wir ziehen nun wieder den Körper $\mathfrak{K} = K(X, Y)$ und die den λ_i entsprechenden Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{K}$ heran. Diese $\mathfrak{P}_i$ sind dann untereinander und von $\mathfrak{D}$ verschieden und genügen der Relation $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{D}$. Daher existiert wesentlich eindeutig ein Element Z in $\mathfrak{K}$ mit der Divisorendarstellung

$$Z \simeq \frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{D}^3}.$$

Dieses ist durch die K-Basis 1, X, Y der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{D}^3}$ in $\mathfrak{K}$ darstellbar, und zwar wegen der Verschiedenheit der $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{D}$ mit von Null verschiedenem Koeffizienten

[7]) Anstatt den Residuensatz anzuwenden, kann man auch ganz analog wie unten vorgehen, nämlich davon ausgehen, daß $S_z\left(z\frac{du}{dz}\right) = 0$ ist, weil $S_z\left(z\frac{du}{dz}\right)dz$ ein ganzes Differential von $k(z)$ ist.

von Y. Es kann also eindeutig als

$$Z = Y - vX - w, \qquad v, w \text{ in } K,$$

normiert werden.

Wir betrachten den Körper $\mathfrak{R}$ als separabel-algebraische Erweiterung $\mathfrak{R}/K(Z)$ vom Grade 3. Multiplizieren wir das ganze Differential dU von $\mathfrak{R}$ mit irgendeinem linearen Kompositum $v'X + w'$ (v', w' in K), so entsteht ein Differential $(v'X + w')dU$ von $\mathfrak{R}$, das höchstens den Nenner $\mathfrak{D}^2$ hat. Da $\mathfrak{D}^2$ im Beitrag von $\mathfrak{D}$ zur Differente von $\mathfrak{R}/K(Z)$ aufgeht (für $p \neq 3$ ist es sogar der genaue Beitrag, für $p = 3$ ein echter Teiler), ist die für $\mathfrak{R}/K(Z)$ gebildete Spur dieses Differentials, d. h. der Ausdruck

$$S_Z\left((v'X + w')\frac{dU}{dZ}\right)dZ,$$

ein ganzes Differential von $K(Z)$ und daher gleich 0, denn $K(Z)$ hat das Geschlecht 0. Wir haben also

$$S_Z\left((v'X + w')\frac{dU}{dZ}\right) = 0.$$

Unsere Behauptung wird sich als wesentlich identisch mit dieser Gleichung, als Kongruenz nach dem Zählerprimdivisor $\mathfrak{P}_Z$ von Z in $K(Z)$ betrachtet, ergeben, also mit der aus ihr durch Übergang zum konstanten Rest mod. $\mathfrak{P}_Z$ entstehenden Gleichung in K.

Nach der lokal-arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper ist entsprechend der Primzerlegung

$$\mathfrak{P}_Z = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 \text{ in } \mathfrak{R}$$

jener konstante Rest mod. $\mathfrak{P}_Z$ die Summe der konstanten Reste mod. $\mathfrak{P}_i$ des Arguments der Spur. Wir haben also die Summenrelation

$$\sum_i\left((v'X + w')\frac{dU}{dZ}\right)\mathfrak{P}_i = 0.$$

Man beachte, daß die konstanten Reste mod. $\mathfrak{P}_i$ in dieser Relation nicht das Symbol ∞ sind, weil der Nenner dZ wegen der Verschiedenheit der $\mathfrak{P}_i$ untereinander prim zu den $\mathfrak{P}_i$ ist.

Die fraglichen konstanten Reste mod. $\mathfrak{P}_i$ berechnen sich wie folgt:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{dY}{dX} - v = -\frac{f_x(X, Y)}{f_y(X, Y)} - v,$$

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{1}{f_y(X, Y)}\frac{dX}{dZ} = -\frac{1}{f_x(X, Y) + vf_y(X, Y)},$$

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ} = -\frac{v'X + w'}{f_x(X, Y) + vf_y(X, Y)},$$

$$(X\mathfrak{P}_i, Y\mathfrak{P}_i) = (x\lambda_i, y\lambda_i),$$

also

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ}\mathfrak{P}_i = -\frac{v'(x\lambda_i) + w'}{f_x(x\lambda_i, y\lambda_i) + vf_y(x\lambda_i, y\lambda_i)}.$$

Aus

$$0 = Z\mathfrak{P}_i = Y\mathfrak{P}_i - v \cdot X\mathfrak{P}_i - w$$

folgt nun

$$y\lambda_i - v \cdot x\lambda_i - w = 0,$$

und daraus durch Differentiation in K

$$d(y\lambda_i) - v\,d(x\lambda_i) = dv \cdot x\lambda_i + dw.$$

Nimmt man also

$$v' = \frac{dv}{du}, \qquad w' = \frac{dw}{du},$$

so wird

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ}\mathfrak{P}_i = \frac{1}{du}\,\frac{-d(y\lambda_i) + v\,d(x\lambda_i)}{f_x(x\lambda_i, y\lambda_i) + vf_y(x\lambda_i, y\lambda_i)}.$$

Wegen

$$f_x\,dx + f_y\,dy = 0$$

oder vielmehr der daraus durch Anwendung von λ_i entstehenden Relation, ist der Bruch rechts

$$= \frac{d(x\lambda_i)}{f_y(x\lambda_i, y\lambda_i)} = (du)\,\lambda_i.$$

Somit ergibt sich schließlich

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ}\mathfrak{P}_i = \frac{(du)\,\lambda_i}{du} = c_{\lambda_i}.$$

Die hergeleitete Summenrelation für die konstanten Reste links ergibt also in der Tat die Behauptung.

4. Wir ziehen aus diesem Beweis noch folgende für später wichtige Folgerung:

Es sei K_0 irgendein Teilkörper von K, der die Körper K_{λ_i} enthält, und es sei du_0 ein ganzes Differential von K_0. Man hat dann auch Relationen

$$(du)\lambda_i = c_{\lambda_i}^{(0)} du_0 \text{ in } K_0$$

mit durch λ_i und du_0 bestimmten Konstanten $c_{\lambda_i}^{(0)}$. Nimmt man nun oben

$$v' = \frac{dv}{du_0}, \qquad w' = \frac{dw}{du_0},$$

so ergibt sich ganz analog

$$\sum_i c_{\lambda_i}^{(0)} = 0,$$

anders ausgedrückt

$$\sum_i (du)\,\lambda_i = 0 \text{ in } K_0.$$

Für den Übergang zur unsymmetrischen Fassung beachten wir, daß ein $K\lambda_1$ und $K\lambda_2$ enthaltender Teilkörper K_0 von K auch $K(\lambda_1 + \lambda_2)$ enthält. Denn $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ sind auch Primdivisoren ersten Grades des Teilkörpers $\mathfrak{R}_0 = K_0(X, Y)$, und daher ist auch $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ ein Primdivisor ersten Grades von $\mathfrak{R}_0$.

In Verallgemeinerung unserer obigen Fassung des Additionstheorems für das ganze Differential haben wir also:

Ist K_0 ein $K\lambda_1$ und $K\lambda_2$ enthaltender Teilkörper von K, so enthält K_0 auch $K(\lambda_1 + \lambda_2)$, und die Relation

$$du(\lambda_1 + \lambda_2) = (du)\,\lambda_1 + (du)\,\lambda_2$$

gilt auch in K_0.

Eingegangen 20. November 1935.

Differentialrechnung bei Charakteristik p.

Von *Oswald Teichmüller* in Göttingen.

Vor kurzer Zeit hat H. Hasse in einer in diesem Journal erschienenen Arbeit [1]) die Theorie der höheren Ableitungen in algebraischen Funktionenkörpern begründet. Er benutzt dazu die aus der Analysis bekannten Formeln für höhere Differentialquotienten impliziter Funktionen. In Körpern der Charakteristik 0 treten keine Schwierigkeiten auf, weil man dort mit Iteration der gewöhnlichen Differentiation durchkommt. Interessant sind daher hauptsächlich die Verhältnisse in algebraischen Funktionenkörpern der Primzahlcharakteristik p. Es ist mir nun gelungen, auch in diesen Körpern die immerhin komplizierten Formeln der Differentiation impliziter Funktionen zu vermeiden. Ich betrachte den algebraischen Funktionenkörper nämlich als inseparablen Oberkörper eines passend gewählten birational invarianten Unterkörpers und kann bei dieser Betrachtungsweise die sämtlichen höheren Differntialquotienten einführen und ihre Haupteigenschaften ableiten, ohne auf Potenzreihenentwicklungen an den einzelnen Primstellen eingehen zu müssen. Dadurch wird die Theorie nicht nur einfacher, sondern man erhält auch nebenher eine Differentiationstheorie für die einfachsten inseparablen Oberkörper beliebiger Körper von Primzahlcharakteristik auf rein algebraischer Grundlage. In diesem Sinne mag die vorliegende Arbeit zugleich als Vorbereitung auf eine in einiger Zeit zu veröffentlichende Arbeit über „p-Algebren“ angesehen werden; denn dort sollen die einfachen und normalen Algebren, die rein inseparable Zerfällungskörper besitzen, studiert werden, und zwar werde ich dort einige spezielle Rechnungen mit Hilfe der hier zuerst eingeführten allgemeinen Differentiation bei Charakteristik p durchführen.

I.

Ω sei irgendein Körper der Charakteristik $p > 0$. Durch Adjunktion einer Unbestimmten x entsteht der rationale Funktionenkörper $\Omega(x)$, der Quotientenkörper des Polynomrings $\Omega[x]$. Durch eine endliche und separable Erweiterung entsteht aus $\Omega(x)$ der algebraische Funktionenkörper K.

Für die meisten Anwendungen genügt es, Ω als vollkommen vorauszusetzen. Dann hat jeder algebraische Funktionenkörper K über Ω von selbst diese Form:

$$K/\Omega(x) \text{ separabel}, \qquad \Omega(x)/\Omega \text{ transzendent}.$$

Wenn Ω unvollkommen sein sollte, muß man sich auf die Körper beschränken, die in diese Form gebracht werden können.

[1]) Hasse, Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik, dieses Journal **175** (1936), S. 50.

Nach dem bekannten Satz vom primitiven Element ist K eine einfache algebraische Erweiterung von $\Omega(x)$:

$$K = \Omega(x, \vartheta),$$

wo ϑ einer separablen algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\Omega(x)$ genügt.

Erhebt man jedes Element des Körpers K der Charakteristik $p > 0$ in die p^n-te Potenz, so ist das bekanntlich ein Isomorphismus von K auf den Teilkörper K^{p^n} aller p^n-ten Potenzen in K. Wir bilden nun das Kompositum Σ_n von K^{p^n} und Ω (d. h. den von K^{p^n} und Ω erzeugten Unterkörper von K). Aus $K = \Omega(x, \vartheta)$ folgt

$$K^{p^n} = \Omega^{p^n}(x^{p^n}, \vartheta^{p^n});$$

Σ_n ist also der von Ω^{p^n}, x^{p^n}, ϑ^{p^n} und Ω erzeugte Unterkörper von K:

$$\Sigma_n = \Omega(x^{p^n}, \vartheta^{p^n}).$$

Wir behaupten nun:

$$K = \Sigma_n(x).$$

Beweis. $\Sigma_n(x) \subseteq K$ ist trivial. y sei irgendein Element von K. Dann ist einerseits $y^{p^n} \in K^{p^n} \subseteq \Sigma_n(x)$, also y eine p^n-te Wurzel aus $\Sigma_n(x)$. Andererseits ist $\Omega(x)(y)/\Omega(x)$ nach Voraussetzung separabel; weil nun $\Sigma_n(x)$ Oberkörper von $\Omega(x)$ ist, muß auch $\Sigma_n(x)(y)/\Sigma_n(x)$ separabel sein [2]). Die p^n-te Wurzel y eines Elements von $\Sigma_n(x)$ kann aber nur dann einer separablen Gleichung mit Koeffizienten aus $\Sigma_n(x)$ genügen, wenn $y \in \Sigma_n(x)$ [3]). Jedes $y \in K$ liegt also in $\Sigma_n(x)$, daher $K = \Sigma_n(x)$.

x genügt der über Σ_n irreduziblen Gleichung

$$t^{p^n} - x^{p^n} = 0.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $x^{p^{n-1}}$ nicht in Σ_n liegt [3]). Weil ϑ über $\Omega(x)$ einer separablen Gleichung genügt, ist ϑ^{p^n} Nullstelle eines über $\Omega^{p^n}(x^{p^n})$ separablen Polynoms. Erst recht wird ϑ^{p^n} über $\Omega(x^{p^n}) \supseteq \Omega^{p^n}(x^{p^n})$ einer separablen Gleichung genügen [2]), d. h. $\Sigma_n = \Omega(x^{p^n}, \vartheta^{p^n})$ ist über $\Omega(x^{p^n})$ separabel. Aber $x^{p^{n-1}}$ ist eine wirkliche p-te Wurzel aus $\Omega(x^{p^n})$, also inseparabel [3]). Das inseparabel algebraische Element $x^{p^{n-1}}$ kann nicht in dem separablen Oberkörper Σ_n von $\Omega(x^{p^n})$ liegen.

Wenn Ω vollkommen ist, dann ist $\Omega = \Omega^p$, darum $\Omega = \Omega^{p^n}$, mithin

$$\Sigma_n = \Omega(x^{p^n}, \vartheta^{p^n}) = \Omega^{p^n}(x^{p^n}, \vartheta^{p^n}) = K^{p^n}.$$

Wir haben also einen *Körper K der Charakteristik p, der über einem Körper $\Sigma(= \Sigma_n)$ inseparabel ist, und zwar ist $K = \Sigma(x)$, wo x Nullstelle des über Σ irreduziblen Polynoms $t^{p^n} - \alpha = 0$ ist* ($\alpha = x^{p^n} \in \Sigma$). Wir wollen nun vorläufig alle übrigen Eigenschaften unserer Funktionenkörper vergessen und nur diesen einfachen algebraischen Sachverhalt zugrunde legen. Er genügt nämlich bei Charakteristik $p > 0$, um hinreichend viele höhere Differentialquotienten in K in vernünftiger Weise erklärbar zu machen.

Bekanntlich ist

$$K \cong \Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha.$$

Dieser Isomorphismus entsteht, wenn man jeder Restklasse des Polynomrings

$$\Sigma[t] \bmod t^{p^n} - \alpha,$$

---

[2]) Ist T ein Oberkörper von P und liegt y in einem Oberkörper von T und ist $\mathsf{P}(y)/\mathsf{P}$ separabel, so ist auch $\mathsf{T}(y)/\mathsf{T}$ separabel.

[3]) Liegt u in einem Oberkörper des Körpers P der Charakteristik $p > 0$ und liegt eine p^m-te Potenz von u in P, so sei zuerst $u^{p^m} = \alpha \in \mathsf{P}$, dann ist das Polynom $t^{p^m} - \alpha$, dessen Nullstelle u ist, in $\mathsf{P}[t]$ irreduzibel. u ist demnach nur dann über P separabel, wenn $u \in \mathsf{P}$.

die ein $c \in \Sigma$ enthält, das (schon in Σ enthaltene) Element c von K zuordnet und wenn man der Restklasse mod $t^{p^n} - \alpha$, die das spezielle Polynom t enthält, das Element x von K zuordnet. Dieser Isomorphismus wird ja gerade beim Beweis der Wurzelexistenz jedes nichtkonstanten Polynoms in einem passenden Oberkörper verwendet [4]). Wir werden nun zuerst die höheren Differentialquotienten im Polynomring $\Sigma[t]$ ohne Schwierigkeit einführen und dann versuchen, durch Restklassenbildung mod $t^{p^n} - \alpha$ zur Differentialrechnung in K zu gelangen. Dabei wird die Inseparabilität von $t^{p^n} - \alpha$ wesentlich benutzt werden.

II.

Σ sei jetzt irgendein kommutativer Ring mit Einselement (z. B. der Körper Σ_n von vorhin). Es soll eine Theorie der höheren Differentialquotienten im Polynomring $\Sigma[t]$ entwickelt werden.

Bei Charakteristik 0 definiert man bekanntlich

$$\frac{d}{dt} t^r = r t^{r-1}, \quad \frac{d}{dt} \sum_r c_r t^r = \sum_r c_r r t^{r-1} .$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^k}{dt^k} t^r = r(r-1) \cdots (r-(k-1))\, t^{r-1} .$$

Aber die Koeffizienten $r(r-1) \cdots (r-(k-1)) = \binom{r}{k} k!$ sind für $k \geqq p$ alle durch p teilbar. Deshalb ist es bei Charakteristik $p > 0$ praktisch, nicht die k-te Ableitung $\frac{d^k}{dt^k}$, sondern den Ausdruck $D^k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k}$ von den Polynomringen mit der Charakteristik 0 zu übertragen. So kommt man zu der

Definition.

$$D_t^k t^r = \binom{r}{k} t^{r-k}, \qquad D_t^k \sum_r c_r t^r = \sum_r c_r \binom{r}{k} t^{r-k} .$$

Wir haben an das D^k einen Index t angehängt, zum Zeichen, daß nach t differenziert wird. D_t^k ist als Operation im Polynomring $\Sigma[t]$ erklärt; wir haben uns zu überzeugen, daß es wirklich im wesentlichen die Eigenschaften hat, die dem $\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k}$ bei Charakteristik 0 zukommen.

Trivial sind die Rechenregeln:

$$D_t^k(f+g) = D_t^k f + D_t^k g . \tag{1}$$

$$D_t^k(cf) = c\, D^k f \quad (c \in \Sigma) . \tag{2}$$

$$D_t^k c = 0 \quad (c \in \Sigma) . \tag{3}$$

Ferner gilt die Leibnizsche Regel:

$$D_t^k(fg) = \sum_{i=0}^{k} D_t^i f \cdot D_t^{k-i} g . \tag{4}$$

---

[4]) S. z. B. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, dieses Journal **137** (1910), § 6.

Beweis. Nach (1) und (2) genügt es, (4) nur für $f = t^r$, $g = t^s$ nachzuweisen. Es ist aber

$$D_t^k(t^r t^s) = \binom{r+s}{k} t^{r+s-k},$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_t^i t^r \cdot D_t^{k-i} t^s = \sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} t^{r-i} \binom{s}{k-i} t^{s-k+i},$$

und bekanntlich ist

$$\binom{r+s}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} \binom{s}{k-i}.$$

Hieraus folgt

$$D_t^k(f_1 \cdots f_r) = \sum_{\substack{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_r = k \\ \varkappa \geqq 0}} D_t^{\varkappa_1} f_1 \cdots D_t^{\varkappa_r} f_r \tag{5}$$

sofort durch Induktion nach r.

$$D_t^k f(g(t)) = \sum_{i=1}^{k} D_{g(t)}^i f(g(t)) \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g \qquad (k > 0). \tag{6}$$

Hierin ist $u = g(t)$ in ein Polynom $f(u)$ eingesetzt zu denken, es handelt sich also um die *Kettenregel* für höhere Ableitungen. Unter $D_g^i f$ ist natürlich $D_u^i f(u)\big|_{u=g(t)}$ zu verstehen.

Beweis. Es genügt, $f(u) = u^r$ anzunehmen. Nach (5) ist dann

$$D_t^k g(t)^r = \sum_{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_r = k} D_t^{\varkappa_1} g \cdots D_t^{\varkappa_r} g.$$

Rechts bezeichnen wir in jedem Summanden, ohne die Reihenfolge zu stören, die positiven unter den $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$. Dann ist $1 \leqq i \leqq k$ und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k$ und

$$D_t^{\varkappa_1} g \cdots D_t^{\varkappa_r} g = g^{r-i} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g.$$

Aber jedes Glied $g^{r-i} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g$ $(1 \leqq i \leqq k,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k,\ \lambda > 0)$ entsteht aus genau $\binom{r}{i}$ Gliedern $D_t^{\varkappa_1} g \cdots D_t^{\varkappa_r} g$ [5]). Daher ist

$$D_t^k g^r = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} \binom{r}{i} g^{r-i} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g.$$

Es ist aber

$$\binom{r}{i} g^{r-i} = D_g^i g^r.$$

Schließlich sei $F(t, u)$ ein Polynom in zwei Unbestimmten. Dann kann man einerseits F „partiell" nach t und nach u differenzieren, andererseits kann man $u = t$ setzen und das entstehende Polynom differenzieren. Hier gilt nun die *Spaltungsregel* [6])

$$D_t^k F(t, t) = \sum_{i=0}^{k} D_t^i D_u^{k-i} F(t, u)\big|_{u=t}. \tag{7}$$

---

[5]) Denn auf $\binom{r}{i}$ verschiedene Arten kann man die Reihe $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ durch $r - i$ Nullen zu einer Reihe $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ auffüllen.

[6]) Behmann, Zur Technik des Differenzierens, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **40** (1931), S. 160—162, für $k = 1$.

Beweis. Nach (1) und (2) genügt es, (7) für $F(t, u) = t^r u^s$ zu beweisen. Dann reduziert sich (7) aber auf (4).

Durch Kombination von (6) und (7) erhält man die explizite Formel für die Ableitungen eines zusammengesetzten Polynoms $F(f(t), g(t))$: man braucht nur (7) auf $F(f(t), g(u))$ anzuwenden und die höheren partiellen Ableitungen dieses Polynoms nach (6) zu berechnen.

Damit sind die Hauptrechenregeln für die höheren Ableitungen im Polynomring ohne jede Charakteristikvoraussetzung abgeleitet.

III.

Kehren wir jetzt zu der Fragestellung vom Ende des ersten Teils der Arbeit zurück! Es sei also ein Körper Σ der Charakteristik $p > 0$ vorgelegt, und K sei ein inseparabler Oberkörper $K = \Sigma(x)$ von Σ, x genüge über Σ der irreduziblen Gleichung $t^{p^n} - \alpha = 0$. Wie schon dort ausgeführt wurde, ist $K \cong \Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$ i. b. a. [7]) Σ.

Es ist unser Ziel, die D_t^k aus dem Polynomring $\Sigma[t]$ in den Restklassenring $\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$ und von dort nach K zu übertragen. Dazu müssen wir erst die $D_t^k(t^{p^n} - \alpha)$ berechnen.

Es ist nach Definition

$$D_t^k(t^{p^n} - \alpha) = \binom{p^n}{k} t^{p^n - k} \qquad (k > 0).$$

Für $k > p^n$ ist natürlich $\binom{p^n}{k} = 0$, dagegen ist $\binom{p^n}{p^n} = 1$. Für $1 \leqq k \leqq p^n - 1$ ist schließlich

$$\binom{p^n}{k} = \binom{p^n - 1}{k - 1} \frac{p^n}{k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Daher ist

$$D_t^k(t^{p^n} - \alpha) = 0 \quad (k = 1, \ldots, p^n - 1 \text{ und } k > p^n),$$

dagegen

$$D_t^{p^n}(t^{p^n} - \alpha) = 1.$$

Hieraus folgt nach (4) für $0 \leqq k \leqq p^n - 1$:

$$D_t^k(t^{p^n} - \alpha)h(t) = \sum_{i=0}^{k} D_t^i(t^{p^n} - \alpha) \cdot D_t^{k-i} h(t) = (t^{p^n} - \alpha) D_t^k h(t),$$

der Operator D_t^k führt also für $k < p^n$ ein durch $t^{p^n} - \alpha$ teilbares Polynom stets wieder in ein ebensolches Polynom über. Man kann dasselbe auch so ausdrücken:

Aus $f(t) \equiv g(t) \pmod{t^{p^n} - \alpha}$ *folgt*

$$D_t^k f(t) \equiv D_t^k g(t) \pmod{t^{p^n} - \alpha} \qquad (k < p^n). \tag{8}$$

Für $k \geqq p^n$ ist dagegen z. B.

$$D_t^k t^{k-p^n}(t^{p^n} - \alpha) = 1,$$

die Einschränkung $k < p^n$ in (8) war also durchaus notwendig.

Nun ordnen wir jedem $f(t) \in \Sigma[t]$ seine Restklasse $\overline{f(t)}$ mod $t^{p^n} - \alpha$ zu, d. i. die Menge aller mod $t^{p^n} - \alpha$ zu $f(t)$ kongruenten Polynome. So entsteht der Restklassenkörper

---

[7]) In bezug auf.

$\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$. *Für* $k < p^n$ *setzen wir*

$$D_{\bar{t}}^k \overline{f(t)} = \overline{D_t^k f(t)}\,.$$

Diese Definition ist *widerspruchsfrei*, denn aus

$$\overline{f(t)} = \overline{g(t)}$$

folgt nach (8)

$$\overline{D_t^k f(t)} = \overline{D_t^k g(t)} \qquad (k < p^n).$$

Die Rechenregeln (1) bis (5) übertragen sich ohne weiteres in den Restklassenkörper. Auf (6) und (7) müssen wir nachher noch eingehen.

Der Übergang zu K ist nun klar: *Bei dem schon mehrfach erwähnten Isomorphismus* $\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha \cong K$ *möge dem Operator* $D_{\bar{t}}^k$ *in* $\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$ *der Operator* D_x^k *entsprechen* $(k < p^n)$. In Formeln sieht das so aus: Für jedes Polynom $f(t) \in \Sigma[t]$ werde definiert:

$$D_x^k f(x) = D_t^k f(t)|_{t=x} \qquad (k < p^n).$$

K besteht ja gerade aus allen Ausdrücken $f(x)$ $(f(t) \in \Sigma[t])$, wo es auf $f(t)$ genau nur mod $t^{p^n} - \alpha$ ankommt. Jedem solchen $f(x) \in K$ wird durch unsere Definition ein $D_x^k f(x)$ zugeordnet, und zwar, wie bewiesen, eindeutig zugeordnet. Wieder gelten ohne weiteres (1) — (5), worin jetzt nur t durch x zu ersetzen ist.

Versuchen wir nun, die Kettenregel (6) aus dem Polynomring nach K zu übertragen! Da ist natürlich zu beachten, daß man wohl ein Polynom in ein anderes einsetzen kann, daß man mit Körperelementen jedoch etwas vorsichtiger umgehen muß. Der Sinn der Kettenregel kann also nur der sein:

y und z seien Elemente von K. Dann kann man sicher y in der Form

$$y = g(x), \qquad g(t) \in \Sigma[t]$$

darstellen. Wir wollen annehmen, es sei auch eine Darstellung

$$z = f(y), \qquad f(t) \in \Sigma[t]$$

möglich, d. h. es sei $z \in \Sigma(y)$. Wegen $y^{p^n} \in \Sigma$ genügt dann y einer über Σ irreduziblen Gleichung $y^{p^m} - \beta = 0$ $(0 \leqq m \leqq n)$ [3]). In $\Sigma(y)$ sind dann also die Ableitungen $D_y^0, \ldots, D_y^{p^m-1}$ erklärt. *Aus der Gültigkeit von* (6) *im Polynomring folgt nun durch Übergang zu den Restklassen sofort*

$$D_x^k z = \sum_{i=1}^{k} D_y^i z \sum_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_i=k \\ \lambda>0}} D_x^{\lambda_1} y \cdots D_x^{\lambda_i} y \qquad (k = 1, \ldots, p^m - 1)\,.$$

Diese Kettenregel gilt insbesondere dann, wenn $K = \Sigma(x) = \Sigma(y)$ ist [8]), und zwar ist sie dann für $k = 1, \ldots, p^n - 1$ anwendbar. Wir wollen dafür gleich zwei Kriterien aufstellen.

Dann und nur dann ist $\Sigma(x) = \Sigma(y)$, *wenn y nicht in* $\Sigma(x^p)$ *liegt.* „Nur dann" ist trivial; wäre $\Sigma(y) \subset \Sigma(x)$, so hätte $\Sigma(y)$ über Σ einen Grad $p^m < p^n$, es wäre schon $y^{p^{n-1}} \in \Sigma$ [3]). Entwickelt man nun y:

$$y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r x^r\,,$$

so sieht man, daß $y^{p^{n-1}} \in \Sigma$ nur dann gelten kann, wenn alle c_r für $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ verschwinden, wenn also $y \in \Sigma(x^p)$ ist.

[8]) Dann hat nämlich $\Sigma(y)$ über Σ den Grad p^n, während y^{p^n} in Σ liegt, deshalb muß in diesem Falle $t^{p^n} - y^{p^n}$ selbst irreduzibel sein.

Dann und nur dann ist $\Sigma(x) = \Sigma(y)$, *wenn* $D_x^1 y \neq 0$ *ist.* Aus

$$y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r x^r$$

folgt nämlich

$$D_x^1 y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r r x^r .$$

Dann und nur dann ist $y \in \Sigma(x^p)$, wenn alle $rc_r = 0$ sind.

Es bedarf wohl keiner besonderen Begründung, daß man durch Kombination von (6) und (7) sofort die expliziten Formeln erhält, nach denen man eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ mit Koeffizienten aus Σ „k-mal differenziert" ($k < p^n$), und daß man aus diesen Formeln sukzessive $D_x^1 y, \ldots, D_x^{p^n-1} y$ berechnen kann, sofern $D_u^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x \\ u=y}} \neq 0$.

IV.

Nachdem nun die Differentialrechnung in beliebigen rein inseparablen einfach algebraischen Körpererweiterungen [9]) begründet worden ist, wenden wir uns wieder den speziellen zu Anfang betrachteten Körpern, den Funktionenkörpern, zu. Es war K ein separabler endlicher Oberkörper des Körpers $\Omega(x)$, der seinerseits transzendent über Ω war. Wir haben damals eine monoton abnehmende Folge $\Sigma_0 = K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ von Unterkörpern in K erklärt: Σ_n war das Kompositum von Ω und K^{p^n}, also birational invariant. Es ist dann $K = \Sigma_n(x)$, wo x der über Σ_n irreduziblen Gleichung

$$t^{p^n} - \alpha = 0 \qquad (\alpha = x^{p^n} \in \Sigma_n)$$

genügt. Wir können also in dem Oberkörper K von Σ_n all die eben angestellten Überlegungen durchführen und gelangen zu Operationen D_x^k ($k = 0, 1, \ldots, p^n - 1$), die die oben aufgezählten Eigenschaften haben. In Formeln lautet die Definition so:

Ist

$$y = \sum_r c_r x^r \qquad (c_r \in \Sigma_n) ,$$

so sei

$$D_x^k y = \sum_r c_r \binom{r}{k} x^{r-k} \qquad (k < p^n) .$$

Dazu müssen noch einige Bemerkungen gemacht werden.

D_x^k wurde eingeführt, indem K als einfach algebraische rein inseparable Erweiterung von Σ_n angesehen wurde. Dabei war nur die eine Bedingung $k < p^n$ gestellt. Für jedes feste k gibt es aber unendlich viele n, die dieser Bedingung genügen. Wir haben uns daher zu überzeugen, daß $D_x^k y$ von dem gewählten n nicht abhängt.

In der Tat: Ist $k < p^n$ und $k < p^m$ und etwa $n < m$, so kann man jedes $y \in K$ in der Form

$$y = g(x), \qquad g(t) \in \Sigma_m[t]$$

darstellen. Von selbst ist dann auch

$$y = g(x), \qquad g(t) \in \Sigma_n[t] .$$

[9]) K heißt über Σ rein inseparabel, wenn K/Σ algebraisch ist und jedes in bezug auf Σ separable Element von K in Σ liegt. Eine einfache algebraische Erweiterung $\Sigma(x)$ von Σ ist dann und nur dann ein rein inseparabler Oberkörper von Σ, wenn eine p^n-te Potenz von x in Σ liegt.

Denn für $n < m$ ist ja $\Sigma_n > \Sigma_m$. Dann ist aber

$$D_x^k y = D_t^k g(t)\big|_{t=x},$$

einerlei ob K als Oberkörper von Σ_n oder von Σ_m betrachtet wird.

Obgleich wir lauter körpertheoretische Überlegungen angestellt haben, ergibt sich nachträglich, daß $D_x^k y$ gar nicht von dem Körper K, sondern nur von der zwischen x und y über Ω bestehenden irreduziblen Gleichung $F(x, y) = 0$, die in y separabel sein sollte, abhängt. Man kann dies einsehen, indem man nach (7) und (6) die $D_x^1 y, D_x^2 y, \ldots$ aus $F(x, y) = 0$ berechnet. Besser ist aber folgender Beweis:

Sei $K' = \Omega(x, y)$, dann ist sicher $K'/\Omega(x)$ separabel und $K \geqq K'$. Ferner sei Σ_n' das Kompositum von Ω und K'^{p^n}. Ist dann

$$y = g(x), \quad g(t) \in \Sigma_n'[t],$$

so ist auch

$$y = g(x), \quad g(t) \in \Sigma_n[t].$$

Wie oben folgt, daß $D_x^k y$ in K und in K' denselben Wert

$$D_x^k y = D_t^k g(t)\big|_{t=x}$$

hat.

Im Funktionenkörper K legt man vor allem auf das Verhalten aller Bildungen bei birationalen Transformationen Wert. Neben x haben wir also die Gesamtheit aller $y \in K$ zu betrachten, für die $K/\Omega(y)$ separabel ist. Ist nun $F(x, y) = 0$, $F(t, u)$ in $\Omega[t, u]$ irreduzibel, so ist

$$D_t^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x \\ u=y}} + D_x^1 y \cdot D_u^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x \\ u=y}} = 0.$$

Weil $K/\Omega(x)$ separabel ist, ist $D_u^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x \\ u=y}} \neq 0$. Daß aber $K/\Omega(y)$ separabel sei, besagt genau Separabilität von $\Omega(x, y)/\Omega(y)$ oder $D_t^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x \\ u=y}} \neq 0$. *Dann und nur dann ist also* $K/\Omega(y)$ *separabel, wenn* $D_x^1 y \neq 0$ ist.

$D_x^1 y \neq 0$ *war aber genau die Bedingung für* $\Sigma_n(y) = K$. *Nach den oben im Falle allgemeiner Körper über die Kettenregel gemachten Ausführungen gilt also*

$$D_x^k z = \sum_{i=1}^{k} D_y^i z \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} D_x^{\lambda_1} y \cdots D_x^{\lambda_i} y$$

ganz allgemein, sowie $K/\Omega(x)$ *und* $K/\Omega(y)$ *separabel ist.*

Durch genauere Betrachtung des Gliedes mit $i = k$ in dieser Formel erhält man ohne weiteres die bekannte Transformationsformel für die Wronskische Determinante, die ein Hauptziel der Arbeit von Hasse war [1]).

Der *genaue Konstantenkörper* Ω^* von K ist als Gesamtheit aller i. b. a. Ω algebraischen Elemente von K definiert. Weil $K/\Omega(x)$ separabel ist, ist offenbar auch Ω^*/Ω separabel. Jedes $y \in \Omega^*$ genügt also einer irreduziblen Gleichung $F(u) = 0$ mit Koeffizienten aus Ω, wo

$$D_u^1 F(u)\big|_{u=y} \neq 0$$

ist; hieraus folgt, daß alle $D_x^k y = 0$ sind.

y liege nun nicht in Ω^*. Es gibt dann einen *kleinsten Exponenten* e *so, daß* $\Omega(y)(x^{p^e})/\Omega(y)$ *separabel ist.* Offenbar ist dies e zugleich der kleinste Exponent, für den

$\Sigma_e/\Omega(y)$ separabel ist, denn es ist ja

$$\Sigma_e = \Omega(x^{p^e}, \vartheta^{p^e})/\Omega(x^{p^e}) \text{ separabel.}$$

e ist auch die größte Zahl, für die y in Σ_e liegt.

Beweis. Bekanntlich ist $\Omega(x^{p^e})(y)/\Omega(x^{p^e})$ separabel [10]), erst recht [2]) ist $\Sigma_e(y)/\Sigma_e$ separabel. y ist aber eine p^e-te Wurzel aus Σ_e, darum ist [3]) $y \in \Sigma_e$.

Wäre $y \in \Sigma_{e+1}$, so wäre [2]) Σ_e/Σ_{e+1} separabel. Denn Σ_e ist über $\Omega(y)$ separabel.

Nach (3) *ist* $D_x^k y = 0$ *für* $1 \leqq k \leqq p^e - 1$. *Dagegen ist*

$$D_x^{p^e} y \neq 0.$$

Beweis. Es sei

$$y = \sum_{r=0}^{p-1} c_r x^{rp^e} \qquad (c_r \in \Sigma_{e+1}).$$

Dann ist

$$D_x^{p^e} y = \sum_{r=1}^{p-1} c_r \binom{rp^e}{p^e} x^{(r-1)p^e};$$

weil y nicht in Σ_{e+1} liegt, sind nicht alle $c_1, \ldots, c_{p-1}$ gleich 0, und bekanntlich ist [11])

$$\binom{rp^e}{p^e} \not\equiv 0 \pmod{p} \qquad (r = 1, \ldots, p-1).$$

Zusammengefaßt:

Liegt y nicht in Ω^*, so gibt es ein e, für das y zwar in Σ_e, nicht aber in Σ_{e+1} liegt. Dies e ist auch das kleinste e, für das $\Sigma_e/\Omega(y)$ separabel ist. p^e ist die kleinste positive Zahl k mit $D_x^k y \neq 0$.

Ω^* ist demnach der Durchschnitt aller Σ_n und zugleich der Körper aller der y, für die $D_x^k y = 0$ für alle $k > 0$ gilt.

Hieraus ergibt sich nun die folgende allgemeinste Form der Kettenregel:

Ist e zu $y \notin \Omega^*$ wie eben bestimmt und liegt z in Σ_e, so gilt

$$D_x^k z = \sum_{i=1}^{k} D_y^i z \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} D_x^{\lambda_1} y \cdots D_x^{\lambda_i} y \qquad (k > 0).$$

V.

Zum Schluß wollen wir noch kurz auf die $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungskörper $K_\mathfrak{p}$ des Funktionenkörpers K eingehen, das sind die perfekten Hüllen von K hinsichtlich der Bewertungen, die den Konstantenkörper trivial bewerten. Wir setzen dabei voraus, daß der *Restklassenkörper* mod $\mathfrak{p}$ *über* Ω *separabel* sei.

$K_\mathfrak{p}$ hat dann folgende Struktur: *π sei eine Ortsuniformisierende an der Primstelle $\mathfrak{p}$, d. h. $\mathfrak{p}$ gehe genau einmal in π auf. $\Omega^\mathfrak{p}$ sei der Körper aller i. b. a. Ω algebraischen Elemente von K, $\Omega^\mathfrak{p}$ ist dann isomorph i. b. a. Ω^* zum Restklassenkörper* mod $\mathfrak{p}$. *Und $K_\mathfrak{p}$ ist dann der Körper aller formalen Potenzreihen* $\sum_{r=w}^{\infty} c_r \pi^r$ $(c_r \in \Omega^\mathfrak{p})$ [12]).

---

[10]) Denn weil zuerst x^{p^e} über $\Omega(y)$ separabel sein sollte, besteht zwischen x und y eine Gleichung der Form $G(x^{p^e}, y) = 0$, $G(t^{p^e}, u)$ in $\Omega[t, u]$ irreduzibel; weil $K/\Omega(x)$ separabel ist, ist $D_u^1 G \neq 0$.

[11]) Man entwickle z. B. $(a+b)^{rp^e} \equiv (a^{p^e} + b^{p^e})^r \pmod{p}$ nach dem binomischen Satz.

[12]) S. Anm. [2]) der unter 1) zitierten Arbeit.

$\Sigma_{n\mathfrak{p}}$ sei der Körper aller formalen Potenzreihen $\sum_{h=v}^{\infty} c_{hp^n}\pi^{hp^n}$ $(c \in \Omega^{\mathfrak{p}})$. Wegen der eindeutigen Zerlegung

$$\sum_r c_r\pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1}\left(\sum_h c_{hp^n+s}\pi^{hp^n}\right)\pi^s$$

ist

$$K = \Sigma_{n\mathfrak{p}} + \Sigma_{n\mathfrak{p}}\pi + \cdots + \Sigma_{n\mathfrak{p}}\pi^{p^n-1},$$

d. h. $K = \Sigma_{n\mathfrak{p}}(\pi)$, wo π Nullstelle des in $\Sigma_{n\mathfrak{p}}[t]$ irreduziblen Polynoms $t^{p^n} - \pi^{p^n}$ ist. Wir können deshalb die bisher für K, Σ_n und x angestellten Überlegungen direkt auf $K_{\mathfrak{p}}$, $\Sigma_{n\mathfrak{p}}$ und π übertragen und so eine Differentialrechnung in $K_{\mathfrak{p}}$ begründen.

Wenn Ω vollkommen ist, ist $\Sigma_{n\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}^{p^n}$. Im allgemeinen Fall ist wenigstens $\Sigma_{n\mathfrak{p}}$ die abgeschlossene Hülle des Kompositums von Ω und $K_{\mathfrak{p}}^{p^n}$ (und zugleich die abgeschlossene Hülle von Σ_n).

Wir wollen nun die expliziten Differentiationsformeln in $K_{\mathfrak{p}}$ aufstellen. Aus

$$\sum_r c_r\pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1}\left(\sum_h c_{hp^n+s}\pi^{hp^n}\right)\pi^s$$

folgt für $k < p^n$ nach Definition von D_π^k

$$D_\pi^k \sum_r c_r\pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1}\sum_h c_{hp^n+s}\pi^{hp^n}\binom{s}{k}\pi^{s-k}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\binom{hp^n+s}{k} \equiv \binom{s}{k} \pmod p \qquad (k < p^n)\ ^{13}),$$

daher

$$D_\pi^k \sum_r c_r\pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1}\sum_h c_{hp^n+s}\binom{hp^n+s}{k}\pi^{hp^n}\pi^{s-k}$$

oder

$$D_\pi^k \sum_r c_r\pi^r = \sum_r c_r\binom{r}{k}\pi^{r-k}.$$

Das ist die gesuchte Formel.

x sei wie immer in K so gewählt, daß $K/\Omega(x)$ separabel ist. Wir nehmen an, π liege nicht nur in $K_{\mathfrak{p}}$, sondern auch in K. Dann besteht eine algebraische Gleichung

$$F(x,\pi) = 0, \qquad F(t,u) \text{ in } \Omega[t,u] \text{ irreduzibel.}$$

Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen $D_t^1F(t,u)\big|_{\substack{t=x\\u=\pi}}$ und $D_u^1F(t,u)\big|_{\substack{t=x\\u=\pi}}$ kurz mit F_x bzw. F_π. Weil $\Omega(x)(\pi)/\Omega(x)$ separabel ist, ist $F_\pi \neq 0$. Es ist aber

$$F_x \cdot D_\pi^1 x + F_\pi = 0,$$

worin $D_\pi^1 x$ in $K_{\mathfrak{p}}$ zu berechnen ist. Hieraus folgt erstens $F_x \neq 0$, also ist $K/\Omega(\pi)$ separabel. Zweitens folgt aber $D_\pi^1 x \neq 0$, man darf also auch in $K_{\mathfrak{p}}$ nach x differenzieren. D_x^k und D_π^k sind demnach beide sowohl in K wie in $K_{\mathfrak{p}}$ erklärte Operationen. Wir behaupten nun:

---

[13]) Z. B. wegen $(1+\pi)^{hp^n+s} = (1+\pi)^s(1+h\pi^{p^n}+\cdots)$.

Für alle $y \in K$ hat $D_x^k y$ in K und in $K_\mathfrak{p}$ denselben Wert. Das gleiche gilt dann natürlich auch für $D_\pi^k y$, π ist ja selbst ein spezielles x.

Beweis. Wegen $K^{p^n} < K_\mathfrak{p}^{p^n} \leq \Sigma_{n\mathfrak{p}}$ und $\Omega \leq \Omega^\mathfrak{p} < \Sigma_{n\mathfrak{p}}$ ist $\Sigma_n \leq \Sigma_{n\mathfrak{p}}$. Aus

$$y = \sum_r c_r x^r, \qquad c_r \in \Sigma_n$$

folgt daher

$$y = \sum_r c_r x^r, \qquad c_r \in \Sigma_{n\mathfrak{p}},$$

in K und in $K_\mathfrak{p}$ ergibt sich daraus derselbe Wert

$$D_x^k y = \sum_r c_r \binom{r}{k} x^{r-k} \qquad (k < p^n).$$

Zum Schluß beweisen wir noch einen trivialen Satz, der ganz deutlich den tiefen Unterschied zwischen unserer Differentialrechnung bei Charakteristik $p > 0$ und der klassischen Differentialrechnung zeigt.

Ist ein Differential des Funktionenkörpers $K_\mathfrak{p}$ auch nur an einer Stelle $\mathfrak{p}$ integrabel, so ist es auch in K integrabel.

Beweis. Wir schreiben das Differential in der Form $y d\pi$. π sei Ortsuniformisierende an der Stelle $\mathfrak{p}$, wo $y d\pi = d\bar{z}$ $(\bar{z} \in K_\mathfrak{p})$ sei. Ist

$$y = \sum_{r=0}^{p-1} c_r \pi^r, \qquad z = \sum_{r=0}^{p-1} d_r \pi^r \qquad (c_r \in \Sigma_1,\ d_r \in \Sigma_{1\mathfrak{p}}),$$

so ist $y = \sum_{r=0}^{p-1} d_r r \pi^{r-1}$, also $c_{p-1} = 0$. Darum ist $y = D_\pi^1 z$, $y d\pi = dz$ mit

$$z = \sum_{r=0}^{p-2} c_r (r+1)^{-1} \pi^{r+1} \in K .$$

Eingegangen 20. Dezember 1935.

Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. I.

Von *Arnold Scholz* in Kiel.

In zyklischen Zahlkörpern K/K_0 gilt der für Primzahlgrad von Furtwängler [1]), für beliebigen Grad von Hasse [2]) bewiesene Normenrestsatz, daß jede Zahl des Grundkörpers K_0, die in K Normenrest nach allen Idealen und auch nach den unendlichen Primstellen von K_0 ist, kurz gesagt: jeder *totale Normenrest* Norm einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus K ist.

(Eine Zahl ist Normenrest nach allen unendlichen Primstellen, wenn ihre absoluten Konjugierten, soweit reell, eine Vorzeichenverteilung aufweisen, die unter Normen vorkommt. — In abelschen Körpern K/K_0 ist eine Zahl β totaler Normenrest, wenn das Hassesche Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\beta, K/K_0}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ ist [2]).

Daß dieser Normenrestsatz schon für abelsche Körper vierten Grades nicht immer gilt, zeigte Hasse [3]) bei rationalem Grundkörper am Beispiel $(\sqrt{-3}, \sqrt{13})$, dessen quadratischer Teilkörper $(\sqrt{-39})$ eine Idealklasse der Ordnung 4 aufweist, was nach Rédei [4]) dadurch bedingt ist, daß 3 in $(\sqrt{13})$ und 13 in $(\sqrt{-3})$ voll zerfällt.

Daß die Ungültigkeit des Normenrestsatzes bei abelschen Körpern sogar eine häufige Erscheinung ist, die bereits bei Produkten zweier zyklischer Körper K_1, K_2 eines beliebigen Primzahlgrades l auftritt, nämlich bei verzweigungsfremden K_1, K_2 dann und nur dann, wenn die Diskriminantenteiler von K_1 und K_2 in K_2 und K_1 voll zerfallen — $K = K_1 K_2$ heiße dann ein Rédeikörper —, ist in einer Abhandlung [5]) von mir in verschärfter Form enthalten. (Schon für $k = 1$ wäre nämlich die linke Seite der dort genannten Ungleichung durch die rechte ausdrückbar, wenn r nicht nur totaler Normenrest, sondern auch Norm wäre.) Diese Vollzerfallsbedingung, gleichzeitig die Diskrepanz zwischen Normenresten [6]) und Normen, war das Kriterium dafür, daß sich K zu einem Zweigkörper vom Typus $(l, l; l)$ erweitern läßt,

[1]) Vgl. H. Hasse, Zahlbericht II (Reziprozitätsgesetz), Jahresber. D. M. V. Erg.-Bd. VI (1930), S. 38, § 8.

[2]) H. Hasse, Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol, Gött. Nachr. 1931, S. 64—69.

[3]) H. Hasse, a. a. O. [2]), S. 68.

[4]) L. Rédei, Über die Klassenzahl d. quadratischen Zahlkörpers, Math. Nat. Anz. d. Ung. Akad. 1931, S. 681, 707.

[5]) A. Scholz, Die Kreisklassenkörper vom Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. II, Math. Ann. **110** (1934), S. 633—649, im folgenden II genannt, insbes. Satz 3 (Hauptirrealitätskriterium); vgl. auch die vorangehende Note I, Math. Ann. **109** (1934), S. 161—190.

[6]) Den Zusatz *total* lassen wir weg, wo es dem Inhalt nach klar ist.

und bereits notwendig zur Bildung des kleinsten normalen nichtabelschen Teiles eines Zweigkörpers; dies ist ein Körper K' mit derjenigen nichtkommutativen Gruppe $\mathfrak{S}$ der Ordnung l^3, deren Elemente S in der Mehrzahl die Ordnung l besitzen (durchweg $S^l = 1$ für $l > 2$; Diedergruppe und zugleich Zweiggruppe für $l = 2$); der Kommutator der beiden Erzeugenden von $\mathfrak{S}$ ist dabei die Erzeugende der Gruppe von K'/K.

Wir wollen jetzt, ohne die Theorie aus I und II heranzuziehen, zunächst an einigen die Sachlage charakterisierenden Beispielen von abelschen Körpern $K = K_1 K_2$, wo K_1 und K_2 zwei zueinander verzweigungsfremde zyklische Körper l-ten Grades mit $l = 2, 3$ sind, klarmachen, daß in einem Rédeikörper K die totalen Normenreste nicht mit den Normen zusammenfallen, und wie man in diesem eine Idealgruppe vom Index l für einen Klassenkörper K'/K mit der obengenannten Gruppe $\mathfrak{S}$ über K_0 bilden kann. Ist dabei $\mathfrak{A}$ die zu K_1 gehörige Untergruppe von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A} = \{A\}_{\mathfrak{S}}$ mit Ord $A = (l, (S-1)^2)$, S erzeugende Substitution von K_1, so hat jede Erweiterung K'' von K_1, deren Relativgruppe S-operatorisomorph zu $\mathfrak{A}$ ist, eine zu $\mathfrak{S}$ isomorphe Gruppe über K_0, wenn nur die in K_1 verzweigten Primideale sich in K'' nicht weiter verzweigen, d. h. $S^l = 1$ auch in $\mathfrak{S}$ gilt. Eine zu K_1 führerfremde und zu $\mathfrak{A}$ operatorisomorphe Klasseneinteilung in K_1 liefert also schon immer einen passenden Klassenkörper K'.

Die Diskrepanz zwischen Normen und Normenresten kann sich bereits bei den Einheiten äußern, oder es ist zwar noch jede Normenrest-Einheit eine Zahlnorm, wie beim Hasseschen Beispiel [3]) und den Konstruktionen in I und II 1, aber nicht mehr jeder Normenrest; im letzten Falle handelt es sich also um eine Eigenschaft von Hauptidealen.

Wir nennen nun in K_0 die Restklassengruppe der Normenreste nach den Zahlnormen überhaupt den (Gesamt-, Zahl-) *Knoten* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\alpha$ von K, innerhalb der Einheitengruppe von K_0 den *Einheitsknoten* $\mathfrak{K}_\varepsilon$ von K und bei den Hauptidealen die Gruppe der aus Normenresten erzeugbaren nach den aus Zahlnormen erzeugbaren den *Idealknoten* $\mathfrak{K}_{(\alpha)}$ von K. Es ist der Einheitsknoten einer Untergruppe des Gesamtknotens isomorph, deren Faktorgruppe der Idealknoten ist. Für die einzelnen Gruppenordnungen, die *Knotungen* $k_\alpha, k_\varepsilon, k_{(\alpha)}$ gilt daher die Relation

$$k_{(\alpha)} \cdot k_\varepsilon = k_\alpha \,. \tag{1}$$

($k_{(\alpha)} = 1$ ist gleichbedeutend damit, daß in K jede Klasse des Hauptgeschlechts sich aus $(S-1)$-ten Potenzklassen zusammensetzt.)

Bei rationalem Grundkörper ist für ungerades l immer $k_\varepsilon = 1$, und dann muß der Rédeikörper einen Idealknoten $\neq 1$ besitzen ($k_{(\alpha)} = l$), der so zustande kommt: ein gewisser totaler Normenrest γ ist zwar in K_1 und K_2, aber nicht mehr in K Hauptidealnorm, sondern dort nur Norm eines (ganzen oder gebrochenen) Ideals j, dessen Idealklasse, die ich in II, S. 645 Kommutatorklasse nannte, eine durch l teilbare Ordnung hat und in der Gruppe eines absoluten Klassenkörpers über K von obengenanntem Typus K' dem Kommutator zweier Trägheitssubstitutionen von K_1 und K_2 entspricht.

Bei irrationalem Grundkörper oder $l = 2$ besteht aber auch die Möglichkeit [7]) $k_{(\alpha)} = 1$, $k_\varepsilon = l$, die wir wegen ihrer größeren Versteckheit hier vorzugsweise betrachten wollen. Das Beispiel A der folgenden Tabelle von Rédeikörpern K entstammt einer ersten Suche nach $k_\varepsilon \neq 1$, die ich gemeinsam mit H. Nehrkorn anstellte.

Den Beispielen füge ich zum Abschluß einen kurzen Beweis an, daß sich außer bei rationalem und imaginär-quadratischem K_0 für jedes l abelsche Körper K/K_0 vom Grade l^2 mit Einheitsknoten bilden lassen, wenn die Klassenzahl von K_0 nicht durch l teilbar

[7]) Angegeben in II, S. 646, vorletzter Satz; der letzte Satz muß gestrichen werden.

ist, und stets solche mit Idealknoten. Das Bildungsprinzip tritt schon bei den Beispielen A — G hervor; bei H muß es wegen gleichzeitiger Bildung von zueinander konjugierten K_1 und K_2 versagen.

K_0	K_1	K_2	K	$k_{(\varkappa)}$	k_ε	$k_\varkappa$
(1)	$(\sqrt{13})$	$(\sqrt{17})$	A	1	2	2
$(\sqrt{-3})$	$(\sqrt[3]{17})$	$(\sqrt[3]{1+9\varrho})$	B	1	3	3
		O 73	C			
		$(\sqrt[3]{73})$	D	3	1	3
		$(\sqrt[3]{71})$	E			
		O 79	F			
$(\sqrt{17})$	$x^3 - 11x - 11 = 0$	O 61	G	1	3	3
$(\sqrt{-3})$	$(\sqrt[3]{2-3\varrho})$	$(\sqrt[3]{2-3\varrho^2})$	H	1	3	3

(ϱ dritte Einheitswurzel; OQ Kreiserweiterung mit dem kubischen Unterkörper der Q-ten Einheitswurzeln.)

A. Weil 13 biquadratischer Rest von 17, aber nicht umgekehrt, hat der dritte quadratische Unterkörper $K_3 = (\sqrt{221})$ von K die Zweierklassenzahl $h = 2$, im engeren Sinne 4, und es ist in ihm -1 keine Einheitsnorm [8]). Es ist daher $-1 = N(\mu)$ in K_3 nur für Zahlen $\mu = \mathfrak{j}^{S-1}$, wo $\mathfrak{j}$ selbst kein Hauptideal. Wegen $h = 2$ enthält $\mathfrak{j}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$, das im absoluten Klassenkörper K nicht zerfällt, in ungerader Potenz; $\mathfrak{p}^2 \neq 13, 17$. Also ist von K_3 aus μ in K nicht einmal Idealnorm. Demnach ist von K_0 aus auch -1 in K keine Zahlnorm. Wohl aber Normenrest; nämlich -1 ist Norm in K_1, K_2, also dort Normenrest und daher auch in K.

(Allgemein überträgt sich die Normenrest-Eigenschaft von den Komponenten K_1, K_2 auf K; vgl. Hasse, Bericht II, § 6, Formel (9). — Eine Einheit ist totaler Normenrest in K, wenn sie es nach dem Führer $\mathfrak{f}$ von K ist oder e-ter Potenzrest nach den Teilern von $\mathfrak{f}$ ist, die sich e-fach in K verzweigen.)

Der zur engeren Klasseneinteilung in $(\sqrt{221})$ gehörige imaginäre Klassenkörper K' hat die Diedergruppe achter Ordnung als absolute Galoisgruppe.

Zu B — F. Hier wird es sich entsprechend um die Normeigenschaft von ϱ in K handeln. Durch die Wahl von $K_1 = K_0(\sqrt[3]{17})$ mit Primidealführer $17 \equiv -1 \pmod 9$ erreichen wir jedenfalls, daß $\varrho = N(\varepsilon)$ ausfällt, wo ε die Grundeinheit in K_1 ist [9]). Ferner muß die leichter zu bestimmende Grundeinheit η des absolut kubischen Zahlkörpers $(\sqrt[3]{17})$ eine $(S-1)$-te Potenz von ε sein, wo S erzeugende Substitution von K_1/K_0 ist [10]).

[8]) A. Scholz, Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$, Math. Z. **39** (1934), S. 95—111, insbes. S. 97.

[9]) A. Scholz, Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm, J. f. M. **161** (1929), S. 201—207, insbes. S. 205, 2. und 1., zweiter Absatz.

[10]) A. Scholz, Idealklassen und Einheiten in kubischen Körpern, Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933), S. 211—222; hier S. 213.

Für die Wahl von K_2 ergeben sich folgende Möglichkeiten: Soll der Führer von K_2 ebenfalls ein Primideal $\mathfrak{q}$ sein, so muß ϱ kubischer Rest mod $\mathfrak{q}$ sein, d. h. $N(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod 9$. Wegen $\varrho = N(\varepsilon)$ in K_1 muß dort, da $\mathfrak{q}$ voll zerfallen soll, ε ein $(3, S-1)$-ter Potenzrest werden:

$$\varepsilon \equiv \mu^{S-1} \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}} \longleftrightarrow \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}}\right)_3 = 1\,, \tag{2}$$

und dann hat ε nach den drei Primteilern von $\mathfrak{q}$ entweder denselben kubischen Restcharakter, nämlich, wenn sogar

$$\varepsilon \equiv \mu^{(S-1)^2} \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}} \tag{3}$$

darstellbar ist, sonst verschiedene Restcharaktere $1, \varrho, \varrho^2$ [11]).

Definieren wir als *kubischen Rang* $r(\alpha, \mathfrak{q})$ einer zu $\mathfrak{q}$ primen Zahl α mod $\mathfrak{q}$ den Rang der Restklassengruppe aller primen Reste mod $\mathfrak{q}$ nach den durch $\alpha^a \nu^3$ ausdrückbaren, so hat α den Rang 0, wenn (2) nicht gilt; den Rang 1, wenn (2), aber nicht (3) gilt; den Rang 2, wenn (3) gilt, aber α kein kubischer Rest ist; den Rang 3, wenn α kubischer Rest ist. Wir werden uns meistens dieser kurzen Ausdrucksweise bedienen.

Wir erhalten nun, wenn auch umgekehrt $\mathfrak{p} = 17$ in K_2 voll zerfällt, in K einen Einheitsknoten der Ordnung 3, wenn oben $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ ist, hingegen einen Idealknoten für $r > 1$:

Es ist ϱ Normenrest in K, weil Norm in K_1 und K_2. Gilt auch $\varrho = N(\gamma)$ in K, so muß die Teilnorm von γ nach K_1

$$N_{K_1}(\gamma) = \varepsilon \alpha^{S-1}\,, \quad \alpha < K_1 \tag{4}$$

ausfallen und zwar ein kubischer Rest mod $\mathfrak{q}$ sein. Hätte ε hier nur den Rang 1, so müßte $r(\alpha) = 0$ sein. Für $r(\alpha, \mathfrak{q}) = 0$ gehörte aber α nicht einmal zur Idealgruppe von K/K_1, enthielte also wenigstens einen Primidealpotenzteiler $\mathfrak{z}$, der in K nicht Idealnorm ist, und dieser könnte auch aus α^{S-1} nicht herausfallen; denn sonst müßte er gegen S invariant sein; invariante Primideale sind aber, da K_0 einklassig, nur die in K_1 unzerfallenen aus K_0, die dann in K zerfallen müssen, und $17^{1/3}$, das aber in K voll zerfällt. Für $r(\alpha, \mathfrak{q}) = 0$ ist also auch α^{S-1} nicht Idealnorm. — Also muß schon $r(\varepsilon) \geqq 2$ sein, damit eine Gleichung (4) gilt; $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ führt demnach auf einen Einheitsknoten.

$r(\varepsilon, \mathfrak{q}) > 1$ liefert hingegen einen Idealknoten: Da die Idealgruppe von K/K_1 aus den (α) mit $r(\alpha, \mathfrak{q}) > 0$ besteht, läßt sich ein $\beta = N(\mathfrak{k})$ in K mit $r(\beta, \mathfrak{q}) = 1$ bestimmen. Für eine passende symbolische Potenz α von β ist dann $\varepsilon \alpha^{S-1} \equiv \nu^3$, d. h. Normenrest mod $\mathfrak{q}$, und dann, als Idealnorm, totaler Normenrest. Somit gilt (4), und es ist $k_\varepsilon = 1$, weil $\varrho = N(\gamma)$. Wegen $r(\beta) = 1$ gilt aber für β anstatt ε keine Gleichung (4), und die K_0-Norm $\beta_0 = \beta^{1+S+S^2} \equiv \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}}$ ist dann Normenrest-Nichtnorm in K, was zu $k_{(\alpha)} = k_\alpha = 3$ führt.

(Beide Male wird der Gesamtknoten in seiner Abbildung in K_1 durch die Klasseneinteilung der Zahlen mit $r \geqq 1$ nach denen mit $r \geqq 2$ geliefert!)

Die Beschaffenheit des Knotens bestimmt nun die Art der Erweiterungen K' mit der Gruppe $\mathfrak{S}$ (s. o). Für $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) > 1$ bilden die Ideale (α') mit $r(\alpha', \mathfrak{q}) > 1$ eine Gruppe, zu der ein Klassenkörper K' gehört, der eine unverzweigte Erweiterung von K ist, die wir oben schon nannten. Diese spezielle Erweiterung K'/K läßt sich noch so variieren, daß man sie mit einer zu K fremden Kreis- oder K_0-Ringklassenkörperer-

[11]) Vgl. A. Scholz — O. Taussky, Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratischer Zahlkörper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluß auf den Klassenkörperturm, J. f. M. **171** (1934), S. 19—41, insbes. S. 21, 22.

weiterung durchkreuzt. — Für $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ erhält man andersgeartete Erweiterungen K': es ist hier schon die Klassenzahl von K nicht durch 3 teilbar, weil in K_1 die Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{q}$ zyklisch ist[9]), und K'/K kann als Klassenkörper mit irgendeiner invarianten Idealgruppe vom Index 3 gewählt werden, die ein Ideal (γ) mit $N(\gamma) \equiv \varepsilon$ in K_1, $\equiv \varrho$ in K_0, *nicht* enthält. Als Führer für K'/K kommen hier alle zu $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ fremden K_0-Ideale in Frage, die einen Primteiler enthalten, dessen absolute Norm $\equiv 4, 7 \bmod 9$ ist. Im Falle eines Primführers $\mathfrak{f}$ (z. B. $\mathfrak{f} = 5$) läßt sich die zu K' gehörige Klasseneinteilung in K_1 so herstellen: gehört $\mathfrak{a}_1$ in K_1 zur Idealgruppe von K, so läßt sich $\mathfrak{a}_1$ wegen $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ durch eine Zahl α_1 von einem Range > 1 erzeugen; dann gehört weiter (α_1) zur Idealgruppe von K', wenn $r(\alpha_1, \mathfrak{f}) > 0$.

Betrachten wir jetzt mit Rücksicht auf die Beispiele C, D, F unserer Tabelle den Fall eines zusammengesetzten Führers $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_m$ für K_2/K_0! Hier lassen sich in K_1 sogar verschiedene Rangfunktionen $r(\alpha)$ so bilden, daß wieder $r(\alpha) > 0$ für die α der Idealgruppe von K/K_1 ist und die Faktorgruppe nach den α' mit $r(\alpha') > 1$ operatorisomorph mit der obengenannten Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ ist. Und zwar führen wir, unsern Beispielen angepaßt, einen Rang so ein, daß wir, wenn gerade das kubische Potenzrestsymbol mit dem Nenner $\mathfrak{q}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{q}_m^{c_m}$ die zu K_2/K_0 gehörige Idealgruppe ausscheidet, in K_1 ein ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ mit der Norm $\Pi \mathfrak{q}_\mu^{c_\mu}$ wählen und dann den Rang von α in K_1 durch die Verteilung der kubischen Restcharaktere

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{c}}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{c}^S}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{c}^{S^2}}\right) \tag{5}$$

wie oben im Primfalle $\mathfrak{q}$ bestimmen. (Wir erhalten 3^{m-1} wesentlich verschiedene Möglichkeiten, eine Funktion $r(\alpha)$ zu bestimmen, wenn wir zwei Funktionen $r(\alpha)$ unserer Fragestellung gemäß als äquivalent ansehen, sobald die α' mit $r(\alpha') \geqq 2$ bei beiden übereinstimmen.)

Ob $r(\alpha) = 0$ oder > 0, lag schon durch K_2 fest. Ist dann β eine Zahl, für die einzeln $r(\beta, \mathfrak{q}_\mu) \geqq k$ ist $(\mu = 1, \ldots m)$, so gilt

$$\beta \equiv \mu^{(S-1)^k} \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}},$$

und es liegt bereits durch K_2 fest, ob $r(\beta) = k$ oder $> k$.

Nun mehr erhalten wir folgendes

Kriterium. K besitzt einen Einheitsknoten, wenn in K_1 einzeln $r(\varepsilon, \mathfrak{q}_\mu) \geqq 1$ und $r(\varepsilon) = 1$ ist, sonst einen Idealknoten.

Beweis. $r(\varepsilon, \mathfrak{q}_\mu) \geqq 1$ bedeutete nur, daß ϱ Norm in K_2 ist, ist also notwendig dafür, daß ϱ Normenrest in K ist, und dies wiederum für $k_\varepsilon > 1$. Ist unter dieser Bedingung $r(\varepsilon) = 1$, so folgt wörtlich wie oben die Existenz eines Einheitsknotens.

Für $r(\varepsilon) \geqq 2$ hingegen bilden die α' mit $r(\alpha') \geqq 2$ eine Idealgruppe für einen K', der über K unverzweigt ist. Dasselbe gilt im Falle $\Pi r(\varepsilon, \mathfrak{q}_\mu) = 0$ für das Drittel aller Rangfunktionen mit $r(\varepsilon) \geqq 2$ (vgl. F). Der Nachweis der Existenz eines Idealknotens aus der Existenz der Idealgruppe $\{(\alpha')\}$, der noch zu liefern wäre, gelingt mit einem β, für das etwa $r(\beta, \mathfrak{q}_1) = 1$ und sonst $r(\beta, \mathfrak{q}_\mu) > 1$, genau wie oben hinter (4).

Infolge des kubischen Reziprozitätsgesetzes zerfällt bei den Beispielen B — F, die wir jetzt einzeln betrachten werden, schon immer 17 in K_2, wenn die $\mathfrak{q}_\mu$ in K_1 zerfallen.

B. Die Lösung (18, 7) der diophantischen Gleichung $x^3 - 17y^3 = 1$ liefert uns die Einheit

$$\eta = 18 - 7\sqrt[3]{17}.$$

Der Führer $1 + 9\varrho$ von K_2 hat die Norm 73. Es gilt

$$11^3 \equiv 17; \quad 8^3 \equiv -9^3 \equiv 1 \pmod{73}.$$

Das liefert

$$\eta \equiv 14, \quad -14, \quad 54$$

nach den Primteilern von 73, und diese Zahlen haben alle denselben nichtkubischen Restcharakter mod $1 + 9\varrho$. Also ist η Grundeinheit in $(\sqrt[3]{17})$ und $r(\eta) = 2$; $r(\varepsilon) = 1$. Das ergibt einen Einheitsknoten.

C — D. In dem vorigen Beispiel, das uns nur einen absoluten Nichtnormalkörper K mit Einheitsknoten lieferte, ersetzen wir jetzt den Führer $1 + 9\varrho$ von K_2 durch seine Norm 73 und können auf diese Weise einen Kreiskörper $K_2 = K_0\left(\sqrt{(1 + 9\varrho)^{-1}(1 + 9\varrho^2)}\right)$ oder einen Ringklassenkörper $K_2 = K_0(\sqrt[3]{73})$ erhalten. Für die zugehörige Klasseneinteilung in K_0 ist im ersten Falle (C) der Quotient, im zweiten Falle (D) das Produkt der kubischen Restcharaktere mod $1 + 9\varrho$ und $1 + 9\varrho^2$ maßgebend. Hatte nun die Einheit η in $(\sqrt[3]{17})$, die vom Range 2 mod $1 + 9\varrho$ war, die Charaktere $\varrho, \varrho, \varrho$ mod $1 + 9\varrho$, so hat sie, da die Reste rational waren, die Charaktere $\varrho^2, \varrho^2, \varrho^2$ mod $1 + 9\varrho^2$. In K_1 fallen daher die Charaktere (5) unabhängig davon, wie man $\mathfrak{c}$ als Quotient oder Produkt je eines Primteilers von $1 + 9\varrho$ und $1 + 9\varrho^2$ koppelt, stets $\varrho, \varrho, \varrho$ für C und 1, 1, 1 für D aus. Im Falle C der Kreiserweiterung K_2 haben wir infolgedessen wieder $r(\eta) = 2$, $r(\varepsilon) = 1$ und daher einen Einheitsknoten; im Falle D der Ringerweiterung $r(\eta) = 3$, $r(\varepsilon) > 1$ und einen Idealknoten.

Abhängig von der obigen Primteilerkoppelung sind jedoch die Körper K'; infolgedessen erhält man im Falle D drei unverzweigte K'/K und im Falle C beispielsweise zum Führer 2 auch drei.

E. Ein Einheitsknoten kommt nicht in Frage, sondern es liegt stets ein Idealknoten vor, wenn beim Grundkörper $K_0 = (\sqrt{-3})$ die Führer von K_1 und K_2, wie hier, beides rationale Primzahlen $p \equiv q \equiv -1 \pmod 9$ sind, was schon gegenseitigen Vollzerfall bedingt. Die Einheit η aus dem reinen kubischen Körper $(\sqrt[3]{p})$ hat jedenfalls einen rationalen Rest nach dem Primteiler ersten Grades von q in $(\sqrt[3]{p})$. Dies ist wegen $q \equiv -1 \pmod 3$ ein kubischer Rest. Also muß $r(\eta, q) \neq 2$ sein und dann $r(\eta) = 3$, was zu einem Idealknoten führt.

F. Weil $79 \not\equiv \pm 1 \pmod 9$, ist ϱ schon kein Normenrest in K_2. Mangels Einheiten-Normenresten in K/K_0 ist also $k_\varepsilon = 1$, $r(\varepsilon, 7 - 3\varrho) = 0$. η hat dann Restcharaktere

$$1, \varrho, \varrho^2 \bmod \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1^S, \mathfrak{q}_1^{S^2}$$

und in derselben Reihenfolge mod $\mathfrak{q}_1^T, \mathfrak{q}_1^{TS}, \mathfrak{q}_1^{TS^2}$, wo $\mathfrak{q}_1$ ein Primteiler von $7 - 3\varrho$ ist und T die Substitution der Ordnung 2 in K_1, die η invariant läßt, und der Quotientencharakter fällt $\varrho^a, \varrho^a, \varrho^a$ mit $a = 0, 1, 2$ je nach der Koppelung $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_1^{TS^a}$ aus. Nur die eine Koppelung ($a = 0$) liefert hier einen unverzweigten K'/K (Idealknoten!), während es zwei Körper K' mit dem Führer 2 gibt [11a]).

G. Nun wollen wir noch zeigen, daß die Möglichkeit, einen Einheitsknoten von der Ordnung 3 zu bilden, durchaus nicht vom Vorhandensein dritter Einheitswurzeln

---

[11a]) Trotzdem gehen diese drei Körper K'/K noch ineinander über, wenn man sie mit dem Körper $(\sqrt[3]{316})$ passend durchkreuzt, ebenso unter C und D bei Durchkreuzung mit $(\sqrt[3]{73})$ und O 73.

im Grundkörper abhängt. Im Fall eines reellen quadratischen Grundkörpers ergibt sich sogar die Möglichkeit, einen absolut normalen Körper K zu bilden, dessen zyklische Teilkörper K_1 und K_2 *beide rationale Primführer* $p \equiv -1$, $q \equiv +1 \pmod 3$ haben, sodaß wieder K_1 Ringklassenkörper, K_2 Kreiskörper wird.

Um verhältnismäßig einfach zu einem passenden Körper K zu kommen, gehen wir aus von einer Gleichung $F(x) = x^3 - px - p = 0$ mit der Diskriminante $(4p - 27)p^2$, die uns einen kubischen Klassenkörper K_1 mit dem Führer p über $K_0 = (\sqrt{4p - 27})$ liefert. p ist gleichzeitig die Norm der Gleichungswurzel ϑ und zwar ihr Idealkubus. Ferner ist p noch unzerfallen in K_0, wenn $p \equiv -1 \pmod 3$, und $\vartheta + 1$ eine Einheit.

Wir wählen nun $p = 11$, also $K_0 = (\sqrt{17})$. Neben $\omega_1 = \vartheta + 1$ finden wir eine Einheit $v_1 = (\vartheta - 2)^{-1}(\vartheta + 3)^2$. Weil K_0 die Klassenzahl 1 hat und K_1/K_0 einen Primführer $p \equiv -1 \pmod 3$, müssen v_1 und ω_1 beides $(S-1)$-te Potenzen [12]) von Einheiten in K_1 sein, der zwei relative Grundeinheiten ε_1 und η_1 über K_0 besitzt mit

$$N(\varepsilon_1) = \varepsilon = 4 + \sqrt{17} \text{ und } N(\eta_1) = 1$$

in K_0, wo dann $\eta_1 = \vartheta^{S-1}$ ausfällt wegen $(\vartheta) = 11^{1/3}$. Nun läßt sich durch Prüfung mod 5 und 7 feststellen, daß v_1 und ω_1 unabhängig sind, und daß, abgesehen etwa von kubischen Faktoren, $v_1 = \varepsilon_1^{S-1}$ und $\omega_1 = \eta_1^{S-1}$ wird: In K_0 ist ε nichtkubischer Rest mod 5; in K_1 gilt daher $r(\varepsilon_1, 5) = 0$, wogegen $\eta_1 = \vartheta^{S-1}$ einen positiven Rang hat. Nun ist

$$\vartheta \equiv 2, -1 \pm \sqrt{17}; \quad \omega_1 \equiv 3, \pm\sqrt{17}; \quad v_1 \equiv \text{rat.}, 2 \pm \sqrt{17};$$
$$\text{Charaktere:} \qquad 1, 1, 1; \qquad 1, \varrho, \varrho^2.$$

Also muß $v_1 = \varepsilon_1^{S-1}$ sein und $\omega_1 = \eta_1^{S-1}$, wenn nicht $\omega_1 = v_1^{3a}$. Das letzte wird aber dadurch ausgeschlossen, daß 1 eine Wurzel von $F(x) \equiv 0 \pmod 7$, demnach $\omega_1 \equiv 2 \not\equiv a^3$ nach einem Primteiler von 7.

Wählen wir jetzt $q = 61$ als Führer von K_2, so erhalten wir in K einen Einheitsknoten: 11 ist kubischer Rest mod 61, daher $r(\vartheta, 61) > 0$, $r(\eta_1) > 1$. Weil ferner ε in K_0 kubischer Rest nach unzerfallenem $q \equiv +1 \pmod 3$, gilt $r(\varepsilon_1, 61) \geqq 1$. Um festzustellen, daß der totale Normenrest ε Nichtnorm in K ist, genügt der Nachweis von $r(\varepsilon_1, 61) = 1$ oder, daß v_1 nichtkubischer Rest. Tatsächlich folgt aus $F(\frac{5}{2}) \equiv 0 \pmod{61}$, daß $v_1 \equiv -\frac{1}{2} \not\equiv a^3$ nach einem Primteiler von 61. — Ein passender Führer für K' ist 5, wegen $\varepsilon \not\equiv a^3 \pmod 5$.

H. Bei den kubischen Beispielen, in denen wir nur einen Teil der möglichen Typen charakterisierten, waren die Idealknotenfälle bereits durch Restcharaktere der Führer im Grundkörper charakterisierbar; in den Einheitsknotenfällen boten diese jedoch erst die Chance 2 : 3, und es mußte noch der Restcharakter einer Einheit in K_1 herangezogen werden. Ein besonderes Interesse verdient noch der Fall konjugierter Primführer für K_1, K_2 bei quadratischem Grundkörper. Hier fällt K normal aus und besitzt bei $K_0 = (\sqrt{-3})$, Führer $p = \pi\pi' \equiv 1 \pmod 9$, stets einen Knoten. Wie aber die Verteilung auf Einheits- und Idealknoten ausfällt, läßt sich aus den klassischen Dichtesätzen nicht ablesen, jedenfalls nicht unmittelbar, da K_1 und K_2 gleichzeitig gebildet werden.

Wählen wir also wieder $K_0 = (\sqrt{-3})$ und jetzt $p = \pi\pi'$ als Führer von $K = K_1 K_2$, so wird, wenn $\pi\pi'$ Primärzerlegung von p, d. h. $\pi \equiv \alpha^3 \pmod{3^{3/2}}$ ist, $K_1 = K_0(\sqrt[3]{\pi})$, $K_2 = K_0(\sqrt[3]{\pi'})$. Nach dem Reziprozitätsgesetz ist $\left(\frac{\pi}{\pi'}\right)_3 = \left(\frac{\pi'}{\pi}\right)_3$; andererseits sind

[12]) a. a. O. [10]), S. 216, Typus $D = 148$.

beide Restcharaktere zueinander konjugiert; also sind beide $= 1$, was den Vollzerfall von π' in K_1 und π in K_2 und damit den oben behaupteten Knoten liefert. — Wir wählen als Beispiele $p = 19, 37, 163, 199$ und erhalten, wenn ε Grundeinheit in K_1 bedeutet, der Reihenfolge nach

$$\begin{aligned}
\pi = 2 - 3\varrho; \quad \varepsilon\sqrt{-3} = \quad & 1 + \sqrt[3]{\pi} \equiv 5,\ 7,\ 10 \pmod{\pi'}; \quad r(\varepsilon, \pi') = 1\,. \\
7 + 3\varrho; \quad & -1 + \sqrt[3]{\pi} \equiv 10,\ 13,\ 17 \pmod{\pi'}; \quad r(\varepsilon, \pi') = 1\,. \\
14 + 3\varrho; \quad & -2 + \sqrt[3]{\pi} \equiv 44,\ 55,\ 58 \pmod{\pi'}; \quad r(\varepsilon, \pi') = 1\,. \\
2 + 15\varrho; \quad & 2 - \varrho + \sqrt[3]{\pi} \equiv 24,\ 50,\ 54 \pmod{\pi'}; \quad r(\varepsilon, \pi') > 1\,.
\end{aligned}$$

Also haben wir, wie in der obigen Tabelle vermerkt, bei $p = 19$ einen Einheitsknoten, ebenso bei $p = 37$ und 163, dagegen bei $p = 199$ einen Idealknoten.

Zum Schluß bringen wir noch die angekündigte allgemeine Konstruktion eines Einheitsknotens der Ordnung l bei gegebenem Grundkörper K_0 nicht durch l teilbarer Klassenzahl mit wenigstens einer Grundeinheit — wie sie im wesentlichen schon durch das Beispiel G angedeutet ist — und für einen Idealknoten ohne diese Nebenbedingungen.

Man bestimme zuerst ein Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades in K_0 als Führer für einen (rein verzweigten) zyklischen K_1 vom Grade l, nach der bekannten Bedingung, daß $\mathfrak{p}$ im l-Primärkörper[13]) von K_0 voll zerfällt. Wählt man dann ein $\mathfrak{q}$ in K_0 als Führer von K_2, das sogar im l-Primärkörper von K_1 voll zerfällt, so erfüllt $K = K_1K_2$ die Bedingungen für einen *Idealknoten* schon reichlich: man erhält hier sogar einen Dispositionskörper[13]) $\widetilde{K}$ zum Führer $\mathfrak{q}$ über K_1, über K ein unverzweigter Körper vom Grade l^{l-1}, dessen über K_0 normaler Unterkörper vom Grade l über K ein Körper K' ist. Die zu $\widetilde{K}$ und K' gehörigen Hauptidealgruppen $\{(\tilde{\alpha})\}$ und $\{(\alpha')\}$ in K_1 sind, bei entsprechender l-Rangdefinition wie oben für $l = 3$, die mit $r(\tilde{\alpha}, \mathfrak{q}) = l$ und die mit $r(\alpha', \mathfrak{q}) \geqq 2$. Solange noch $r(\gamma, \mathfrak{q}) \geqq 2$ für alle Einheiten und l-ten Idealpotenzen γ, bleibt der Idealknoten daher bestehen; ein Einheitsknoten kann erst durch Rangherabsetzung für ein γ entstehen.

Hat nun K_0 eine nicht durch l teilbare Klassenzahl, so ist[9]) jede Grundeinheit ε_0 aus K_0 Norm einer relativen Grundeinheit ε_1 in K_1, und außerdem hat man nur eine weitere relative Grundeinheit η_1 in K_1 mit der Norm 1 in K_0. Es ist $\eta_1 = \pi_1^{s-1}$, wo $N(\pi_1) = \pi_0$, $(\pi_0) = \mathfrak{p}^a$ in K_0. Wegen des Vollzerfalls von $\mathfrak{p}$ in K_2 muß $r(\eta_1, \mathfrak{q}) \geqq 2$ bleiben. Hingegen dürfen wir $r(\varepsilon_1, \mathfrak{q}) = 1$ für irgendeines der ε_1 ansetzen, und erhalten dann wie oben für $l = 3$ einen Einheitsknoten. Dieser Ansatz verknüpft die Nichtrestbedingung

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1^{(s-1)^{l-2}} \not\equiv \nu^l \pmod{\mathfrak{q}_1} \tag{6}$$

für einen Primteiler $\mathfrak{q}_1$ von $\mathfrak{q}$ in K_1 mit $\tilde{\varepsilon}_1^{s-1} = \varepsilon_0\mu^l \equiv \nu^l \pmod{\mathfrak{q}_1}$ und den anderen positiven Restbedingungen und ist erfüllbar, weil $\tilde{\varepsilon}_1$ von all' diesen anderen Einheiten l-unabhängig ist.

---

[13]) A. Scholz, Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe, Math. Z. **30** (1929), S. 332—356, insbes. S. 349; Körper $K^{(l)}$. Vgl. auch die auf S. 350 folgende Konstruktion des Dispositionskörpers.

Eingegangen 21. Dezember 1935.

Zyklische algebraische Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p.

Von *Hermann Ludwig Schmid* in Göttingen.

Hasse hat die arithmetische und analytische Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper vom Grade p bei endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p entwickelt [1]). Die Ausdehnung dieser Theorie auf beliebigen Grad p^n ($n \geqq 1$) setzt die Verallgemeinerung der Artin-Schreierschen Theorie der zyklischen Erweiterungen p-ten Grades über Körpern der Charakteristik p auf beliebigen Grad p^n voraus [2]). Inzwischen haben nun A. A. Albert und E. Witt den Erzeugungsmechanismus für beliebigen Grad p^n gefunden [3]) [4]). Beide arbeiten durchweg mit einer Zerlegung in n Schritte p-ten Grades.

Ich gebe in dieser Arbeit den Ansatz zu einer arithmetischen Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p. Die dabei angewandten Methoden und erzielten Ergebnisse zeigen, daß die vorliegende Theorie durchaus nicht durch bloße Iteration der entsprechenden Tatsachen im Falle des Grades p gewonnen werden können. Insbesondere wird ihre Aufstellung erst durch eine Lösung des hier auftretenden Normierungsproblems ermöglicht.

Zusatz bei der Korrektur: Diese Arbeit war Besprechungsgrundlage in einer von E. Witt geleiteten Arbeitsgemeinschaft. Witt fand dabei eine neue Rechenoperation, für welche meine grundlegende Assoziativitätsrelation in eine gewöhnliche Assoziativität übergeht. Mit diesem neuen Kalkül lassen sich meine Resultate formal einfacher schreiben. Witt wird darauf in einer späteren Arbeit selbst zurückkommen.

1. Erzeugungsmechanismus und galoissche Gruppe.

Es sei K ein beliebiger Grundkörper der Charakteristik p. Z_ν sei ein über K zyklischer Körper vom Grade p^ν mit erzeugendem Automorphismus s_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$). S_ν bezeichne die Spur von Z_ν nach K. c_ν sei ein festes Hilfselement aus Z_ν mit $S_\nu(c_\nu) = 1$. Der Operator $\wp$ habe die Bedeutung $\wp x = x^p - x$. Δ_ν sei der Operator $s_\nu - 1$. Mit diesen Bezeichnungen lauten die beiden Hauptsätze der Wittschen Erzeugung:

I. Hauptsatz. Enthält der Körper Z_ν den Körper $Z_{\nu-1}$, so besitzt Z_ν über $Z_{\nu-1}$ eine Erzeugung

[1]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934). Im folgenden zitiert mit H I.

[2]) Artin-Schreier, Über eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, Abhandl. Math. Sem. Hamburg **5** (1927).

[3]) A. A. Albert, Cyclic fields of degree p^n over F of characteristic p, Bulletin A. M. S. **40** (1934).

[4]) E. Witt, Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^l, Journ. f. Math. **174** (1936).

$$Z_\nu = Z_{\nu-1}(v_\nu) \qquad \nu = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

mit

$$\wp v_\nu = z_{\nu-1}\,, \tag{2}$$

wo $z_{\nu-1}$ ein Element aus $Z_{\nu-1}$ ist, das der Relation

$$\Delta_{\nu-1} z_{\nu-1} = \wp c_{\nu-1} \tag{3}$$

genügt.

II. Hauptsatz. Für jedes $z_{\nu-1}$, also für jede Lösung der Gleichung (3) in $Z_{\nu-1}$, ist der durch (1), (2) definierte Körper Z_ν ein über K zyklischer Körper vom Grade p^ν, der $Z_{\nu-1}$ enthält. Ein erzeugender Automorphismus ist durch

$$s_\nu = (v_\nu \to v_\nu + c_{\nu-1})$$

gegeben.

Die Gleichung (3) stellt die Verallgemeinerung der für den Fall $n = 2$ von Artin-Schreier angegebenen Differenzengleichung

$$f(v_1 + 1) - f(v_1) = (v_1 + \beta_1)^{p-1} - v_1^{p-1} \tag{4}$$

dar. Dabei ist $\wp v_1 = \beta_1$. Man wähle einfach $c_1 = -v_1^{p-1}$ und $s_1 = (v_1 \to v_1 + 1)$.

Bemerkenswert ist, daß die Gleichung $\Delta z = \wp c$ stets Lösungen z besitzt. Dies besagt, daß sich die Körperkonstruktion unbeschränkt fortsetzen läßt, daß es also unter allen Umständen zyklische Körper beliebig hohen Grades p^n über K gibt, wenn es nur solche vom Grade p gibt.

Die Albertsche Erzeugungsart ergibt sich aus der Wittschen Erzeugung, indem man

$$c_\nu = (-1)^\nu \prod_{i=1}^{\nu} v_i^{p-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

setzt [5]). Die in dieser Arbeit gegebene Lösung des Normierungsproblems zeigt, daß die Albertsche Wahl der Größen c_ν für den Aufbau einer arithmetischen Theorie ungeeignet ist. Wir wollen daher im folgenden die viel allgemeinere Wittsche Erzeugungsart verwenden. Wir werden uns die Freiheit in der Wahl der Hilfsgrößen c_ν (die nur der Bedingung $S_\nu(c_\nu) = 1$ genügen müssen) in möglichst vorteilhafter Weise zunutze machen.

Nach Wahl von c_ν ergibt sich z_ν aus der verallgemeinerten Differenzengleichung (3) nur bis auf Konstante (Elemente aus K) eindeutig [6]). z_ν werde im folgenden, dieser Freiheit entsprechend, beliebig, aber festbleibend ausgewählt. Auch über diese Wahl werden wir später noch entscheiden. Die allgemeinste Lösung von (3) ergibt sich dann in der Form $z_\nu + \beta_\nu$ mit β_ν aus K. So erhält man folgende Erzeugung des allgemeinsten Körpers Z_n:

(5)

$Z_1 = K(v_1)$	$\wp v_1 = \beta_1$	$\Delta_1 v_1 = 1$	
$Z_2 = Z_1(v_2)$	$\wp v_2 = z_1 + \beta_2$	$\Delta_2 v_2 = c_1$	$\Delta_1 z_1 = \wp c_1$
$Z_3 = Z_2(v_3)$	$\wp v_3 = z_2 + \beta_3$	$\Delta_3 v_3 = c_2$	$\Delta_2 z_2 = \wp c_2$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$Z_n = Z_{n-1}(v_n)$	$\wp v_n = z_{n-1} + \beta_n$	$\Delta_n v_n = c_{n-1}$	$\Delta_{n-1} z_{n-1} = \wp c_{n-1}$

Z_n ist also durch n Parameter $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (Elemente aus K) erzeugbar.

---

[5]) Man beachte, daß für die Wurzeln einer normierten Gleichung $\wp v = \alpha$ die Spur $S(v^i) = 0$ ist für $0 \leqq i \leqq p-2$, während $S(v^{p-1}) = -1$ ist. Durch Zusammensetzen der Spur S_ν aus Teilspuren erkennt man, daß $S_\nu\left((-1)^\nu \prod_{i=1}^{\nu} v_i^{p-1}\right) = 1$ ist.

[6]) Wir setzen definitorisch $c_0 = 1$ und $z_0 = 0$.

Um in (5) eine echte Erweiterung vom Grade p^n zu erhalten, muß man

$$\beta_1 \neq \wp\,\beta_0$$

mit β_0 aus K wählen. Die Bedingungen

$$z_\nu + \beta_{\nu+1} \neq \wp\, z'_\nu$$

mit z'_ν aus Z_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$) sind von selbst erfüllt, da die gegenteilige Annahme auf $S_\nu(c_\nu) = 0$ führen würde im Widerspruch zu $S_\nu(c_\nu) = 1$.

Wird der erzeugende Automorphismus $s_n = (v_n \to v_n + c_{n-1})$ der zyklischen galoisschen Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ von Z_ν über K auf Z_ν über K angewandt ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), so induziert er gerade den erzeugenden Automorphismus $s_\nu = (v_\nu \to v_\nu + c_{\nu-1})$ der zyklischen galoisschen Gruppe $\mathfrak{Z}_\nu$ von Z_ν über K. Wir können daher im folgenden den Index bei den Automorphismen s und den Operatoren Δ weglassen.

Einem beliebigen Element $s' = s^k$ ($k \bmod p^n$) der Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ ordnen wir ein System von n Zahlen

$$(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) \tag{6}$$

zu, entsprechend der p-adischen Darstellung von k:

$$k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_{n-1}\, p^{n-1} + \cdots,$$

wobei die k_ν dem reduzierten Restsystem $0, 1, \ldots, p-1$ entnommen seien. Wir können dann sagen:

Jeder Automorphismus von Z_n über K ist umkehrbar eindeutig durch n Zahlen aus dem Primkörper von K charakterisiert. Die Zuordnung (6) hat folgende Bedeutung: Nach dem Fundamentalsatz der galoisschen Theorie entsprechen den Unterkörpern Z_ν von Z_n umkehrbar eindeutig Untergruppen $\mathfrak{U}_\nu$ von $\mathfrak{Z}_n$. Den Gruppen $\mathfrak{U}_\nu$ sind im Sinne von (6) die Zahlsysteme

$$(0, 0, \ldots, 0, k_\nu, k_{\nu+1}, \ldots, k_{n-1})$$

zugeordnet. Dabei ist $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{U}_\nu \cong \mathfrak{Z}_\nu$ und die Faktorgruppe $\mathfrak{U}_\nu/\mathfrak{U}_{\nu+1}$ isomorph zur galoisschen Gruppe von $Z_{\nu+1}$ über Z_ν. Ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{U}_\nu/\mathfrak{U}_{\nu+1}$ im Sinne von (6) wird gerade durch die Koordinate k_ν geliefert.

2. Das Normierungsproblem.

Der Erzeugungsmechanismus (5) kann je nach Wahl der nichtinvarianten Hilfsgrößen c_ν und der sich daraus ergebenden Größen z_ν sehr verschiedenartig ausfallen. Diese Wahl geeignet zu treffen, soll das Normierungsproblem für die Körper Z_n heißen. Dafür muß in erster Linie bestimmend sein, daß sich nach getroffener Wahl die arithmetischen Eigenschaften eines Körpers Z_n einfach beschreiben lassen. Im einzelnen kann man fordern, daß sich die den Körper Z_n erzeugenden Größen z_ν aus (3) formal möglichst einfach ergeben oder daß sich die explizite Berechnung des Artin-Symbols einfach durchführen läßt oder daß die Rechenregeln für das Normenrestsymbol vernünftig lauten.

Wir geben nun anschließend eine Lösung des Normierungsproblems, die die aufgestellten Forderungen weitgehend befriedigt.

Wir setzen c_ν als Polynom von $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ und z_ν als Polynom von $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ mit Koeffizienten aus dem Primkörper von K an:

$$c_\nu = c_\nu(v_1, v_2, \ldots, v_\nu), \qquad z_\nu = z_\nu(v_1, v_2, \ldots, v_\nu; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)\,.$$

Die Differenzengleichung (3) kann dann in der Form

$$(7)\quad z_\nu(v_1+1, v_2+c_1, \ldots, v_\nu+c_{\nu-1}; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu) - z_\nu(v_1, v_2, \ldots, v_\nu; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$$
$$= c_\nu(v_1+\beta_1, v_2+\beta_2+z_1, \ldots, v_\nu+\beta_\nu+z_{\nu-1}) - c_\nu(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

geschrieben werden.

Es ist im folgenden von entscheidender Bedeutung, die Größen $v_1, v_2, \ldots, v_\nu; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ als Unbestimmte aufzufassen und die Gleichung (7) *im Körper der rationalen Zahlen zu lösen.* Wenn dann bei einer solchen Lösung die Koeffizienten von c_ν und z_ν keine unerlaubten (durch p teilbaren) Nenner besitzen, entspringt daraus eine Lösung von (7) im Körper Z_ν, indem man den Unbestimmten wieder die alte Bedeutung zurückgibt. Wir ersetzen formal die v_i durch x_i und die β_i durch y_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ und schreiben (7) in der Form

$$(7a)\quad z_\nu(x_1+1, x_2+c_1, \ldots, x_\nu+c_{\nu-1}; y_1, \ldots, y_\nu) - z_\nu(x_1, \ldots, x_\nu; y_1, \ldots, y_\nu)$$
$$= c_\nu(x_1+y_1, x_2+y_2+z_1, \ldots, x_\nu+y_\nu+z_{\nu-1}) - c_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)\,.$$

Natürlich sind in den Größen c_i und z_i ebenfalls die obigen Ersetzungen vorzunehmen. Der Koeffizientenbereich sei der Körper der rationalen Zahlen.

Nun sei $f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ein beliebiges Polynom von $x_1, x_1, \ldots, x_\nu$ mit rationalen Koeffizienten. Wir zeigen dann, daß folgende Paare c_ν und z_ν eine Lösung von (7a) darstellen:

$$(8)\quad \boxed{\begin{aligned} c_\nu(x_1, \ldots, x_\nu) &= f_\nu(x_1+1, x_2+c_1, \ldots, x_\nu+c_{\nu-1}) - f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) - f_\nu(1, 0, \ldots, 0) \\ z_\nu(x_1, \ldots, x_\nu; y_1, \ldots, y_\nu) &= f_\nu(x_1+y_1, x_2+y_2+z_1, \ldots, x_\nu+y_\nu+z_{\nu-1}) - f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\ &\quad - f_\nu(y_1, y_2, \ldots, y_\nu) \end{aligned}}$$

(8) ist ein rekursives System zur Berechnung von c_ν und z_ν [7]). Wir stellen zunächst einige Eigenschaften dieser Größen fest. Es ist, kurz geschrieben,

$$(9)\qquad c_\nu(0) = 0 \quad \text{und} \quad z_\nu(0; y) = z_\nu(x; 0) = 0\,.$$

Zwischen c_ν und z_ν besteht der Zusammenhang

$$(10)\qquad c_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = z_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu; 1, 0, 0, \ldots, 0)\,.$$

z_ν ist ein in den Variablen x und y symmetrisches Polynom, d. h. es gilt, kurz geschrieben,

$$(11)\qquad z_\nu(x; y) = z_\nu(y; x)\,.$$

Schließlich genügt z_ν einer additiven Assoziativitätsrelation, die in den Unbestimmten ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ geschrieben so lautet [8]):

$$(12)\quad \begin{aligned} &z_\nu(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2+z_1(\xi_1; \eta_1), \ldots, \xi_\nu+\eta_\nu+z_{\nu-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1}); \zeta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_\nu) \\ &\qquad + z_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu) \\ &= z_\nu(\eta_1+\zeta_1, \eta_2+\zeta_2+z_1(\eta_1; \zeta_1), \ldots, \eta_\nu+\zeta_\nu+z_{\nu-1}(\eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu-1}); \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu) \\ &\qquad + z_\nu(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu)\,. \end{aligned}$$

---

[7]) Der Sinn des Lösungsansatzes (8) ist folgender: Wäre $S_\nu(c_\nu) = 0$, so könnte man wegen der Vertauschbarkeit der Operatoren $\wp$ und Δ Lösungen der Gleichung $\Delta z_\nu = \wp c_\nu$ in der Form $c_\nu = \Delta f_\nu$ und $z_\nu = \wp f_\nu$ mit f_ν aus Z_ν erhalten. Wegen $S_\nu(c_\nu) = 1$ ist dies aber in Z_ν unmöglich. Faßt man aber v_i und β_i als Unbestimmte auf und rechnet im Körper der rationalen Zahlen, so bleibt der Formalismus $\Delta \wp f_\nu = \wp \Delta f_\nu$ erhalten. Daß es über diesen Umweg möglich ist, eine Lösung c_ν, z_ν von (7) in z_ν mit $S_\nu(c_\nu) = 1$ zu bekommen, werden wir sofort sehen. Der Ansatz (8) kann als additives Faktorensystem aufgefaßt werden.

[8]) Die additive Assoziativitätsrelation ist eine Folge der Tatsache, daß z_ν als additives Faktorensystem geschrieben ist.

Setzen wir zur Abkürzung

$$g_\nu(\xi, \eta, \zeta) = z_\nu(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + z_1(\xi_1; \eta_1), \ldots, \xi_\nu + \eta_\nu + z_{\nu-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{\nu-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1}); \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu),$$

so können wir (12) kurz so schreiben:

$$g_\nu(\xi, \eta, \zeta) + z_\nu(\xi; \eta) = g_\nu(\eta, \zeta, \xi) + z_\nu(\eta; \zeta). \tag{15}$$

Beweis. Wir schreiben z_ν in der Form (8). Dann ersehen wir sofort die Richtigkeit von (12) für $\nu = 1$. Wir nehmen an, (12) sei für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$ schon bewiesen. Soll dann (12) auch für $\nu = k$ gelten, so muß die Richtigkeit folgender Identität gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1, \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + z_1(\xi_1; \eta_1) + g_1(\xi, \eta, \zeta), \ldots, \xi_k + \eta_k + \zeta_k + z_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) + g_{k-1}(\xi, \eta, \zeta)) \\
&\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + z_1(\xi_1, \eta_1), \ldots, \xi_k + \eta_k + z_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{k-1})) - f_k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k) \\
&\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + z_1(\xi_1, \eta_1), \ldots, \xi_k + \eta_k + z_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{k-1})) - f_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) - f_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \\
&\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1, \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + z_1(\eta_1; \zeta_1) + g_1(\eta, \zeta, \xi), \ldots, \xi_k + \eta_k + \zeta_k + z_{k-1}(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}) + g_{k-1}(\eta, \zeta, \xi)) \\
&\eta_1 + \zeta_1, \eta_2 + \zeta_2 + z_1(\eta_1; \zeta_1), \ldots, \eta_k + \zeta_k + z_{k-1}(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})) - f_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \\
&\eta_1 + \zeta_1, \eta_2 + \zeta_2 + z_1(\eta_1; \zeta_1), \ldots, \eta_k + \zeta_k + z_{k-1}(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})) - f_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)) - f_k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k).
\end{aligned}$$

Nach Wegheben der gleichen Glieder bleibt noch zu beweisen:

$$-\eta_1 + \zeta_1, \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + z_1(\xi_1; \eta_1) + g_1(\xi, \eta, \zeta), \ldots) = f_k(\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1, \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + z_1(\eta_1; \zeta_1) + g_1(\eta, \zeta, \xi), \ldots).$$

Dies ist aber nach Induktionsannahme eine koordinatenweise Identität. Damit ist die Assoziativitätsrelation bewiesen.

Ersetzen wir in (12) die η_i durch x_i und die ξ_i durch y_i ($i = 1, 2, \ldots, \nu$), ζ_1 durch 1, die übrigen ζ_i durch 0, so geht unter Beachtung von (10) und (11) die Assoziativitätsrelation (12) direkt in die Identität (7a) über. Damit ist unsere Behauptung, daß die in (8) definierten Größen c_ν und z_ν eine Lösung von (7a) darstellen, bewiesen.

Wir werden nun eine Lösung von (7) in der Form (8) bekommen, wenn Polynome f_ν so existieren, daß in (8) c_ν und z_ν lauter mod p ganze Koeffizienten erhalten. Wir geben mit den Polynomen

$$\boxed{f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = -\left(\frac{x_\nu^p}{p} + \frac{x_{\nu-1}^{p^2}}{p^2} + \cdots + \frac{x_1^{p^\nu}}{p^\nu}\right)} \tag{13}$$

für diese Frage einen Existenzbeweis. Dazu brauchen wir folgenden

Hilfssatz. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Polynom in den n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit ganz-rationalen Koeffizienten. Dann gilt für jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ die Polynomkongruenz

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{p^k} - P(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)^{p^{k-1}} \equiv 0 \bmod p^k. \tag{14}$$

Beweis. (14) ist für $k = 1$ richtig. Allgemein beweisen wir die Gültigkeit von (14) durch Induktion nach k unter Berücksichtigung des auch für Polynome A, B von mehreren Variablen mit ganz-rationalen Koeffizienten gültigen Satzes aus der Zahlentheorie: Aus

$$A \equiv B \bmod p^k. \tag{16}$$

folgt

$$A^p \equiv B^p \bmod p^{k+1}.$$

Wir setzen einfach $A = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{p^k}$ und $B = P(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)^{p^{k-1}}$.

Dieser Hilfssatz wird uns leicht den angekündigten Existenzbeweis liefern. Wir

behaupten also, daß

$$-c_\nu = \frac{(x_\nu + c_{\nu-1})^p - x_\nu^p}{p} + \frac{(x_{\nu-1} + c_{\nu-2})^{p^2} - x_{\nu-1}^{p^2}}{p^2} + \cdots + \frac{(x_1 + 1)^{p^\nu} - x_1^{p^\nu} - 1}{p^\nu}$$

(15) und

$$-z_\nu = \frac{(x_\nu + y_\nu + z_{\nu-1})^p - x_\nu^p - y_\nu^p}{p} + \frac{(x_{\nu-1} + y_{\nu-1} + z_{\nu-2})^{p^2} - x_{\nu-1}^{p^2} - y_{\nu-1}^{p^2}}{p^2} + \cdots + \frac{(x_1 + y_1)^{p^\nu} - x_1^{p^\nu} - y_1^{p^\nu}}{p^\nu}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots)$$

Polynome mit ganz-rationalen Koeffizienten sind. Wegen (10) genügt es, diese Behauptung für z_ν nachzuweisen.

Für $\nu = 1$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an, wir hätten z_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ schon als Polynom mit ganz-rationalen Koeffizienten erkannt, und wollen die gleiche Eigenschaft für z_{k+1} nachweisen. Wir führen ein Äquivalenzzeichen „$\sim$“ mit folgender Bedeutung ein: Für zwei Polynome g und h soll $g \sim h$ bedeuten, daß $g - h$ ein Polynom mit ganz-rationalen Koeffizienten ist. Dann gilt einerseits

$$-z_{k+1} = \frac{(x_{k+1} + y_{k+1} + z_k)^p - x_{k+1}^p - y_{k+1}^p}{p} + \cdots$$

$$\sim \frac{z_k^p}{p} + \frac{(x_k + y_k + z_{k-1})^{p^2} - x_k^{p^2} - y_k^{p^2}}{p^2} + \cdots + \frac{(x_1 + y_1)^{p^{k+1}} - x_1^{p^{k+1}} - y_1^{p^{k+1}}}{p^{k+1}}.$$

Andererseits ist nach der Induktionsannahme

$$-\frac{z_k^p}{p} \sim \frac{1}{p} z_k(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_k^p;\ y_1^p, y_2^p, \ldots, y_k^p)$$

$$\sim \frac{1}{p}\left[\frac{(x_k^p + y_k^p + z_{k-1}(x_1^p, \ldots, x_{k-1}^p; y_1^p, \ldots, y_{k-1}^p))^p - x_k^{p^2} - y_k^{p^2}}{p} + \cdots + \frac{(x_1^p + y_1^p)^{p^k} - x_1^{p^{k+1}} - y_1^{p^{k+1}}}{p^k}\right].$$

Wir werden also $z_{k+1} \sim 0$ nachgewiesen haben, wenn wir die Richtigkeit folgender Äquivalenzbeziehung gezeigt haben:

$$\frac{(x_k + y_k + z_{k-1})^{p^2}}{p^2} + \frac{(x_{k-1} + y_{k-1} + z_{k-2})^{p^3}}{p^3} + \cdots + \frac{(x_1 + y_1)^{p^{k+1}}}{p^{k+1}}$$

$$\sim \frac{(x_k^p + y_k^p + z_{k-1}(x_1^p, \ldots, x_{k-1}^p; y_1^p, \ldots, y_{k-1}^p))^p}{p^2}$$

$$+ \frac{(x_{k-1}^p + y_{k-1}^p + z_{k-2}(x_1^p, \ldots, x_{k-2}^p; y_1^p, \ldots, y_{k-2}^p))^{p^2}}{p^3} + \cdots + \frac{(x_1^p + y_1^p)^{p^k}}{p^{k+1}}.$$

Diese Äquivalenzbeziehung ist aber nach unserem Hilfssatz gliedweise erfüllt. Also ist auch z_{k+1} ein Polynom mit ganz-rationalen Koeffizienten.

Wir haben jetzt bewiesen, daß die Elemente

(16)
$$c_\nu = -\frac{(v_\nu + c_{\nu-1})^p - v_\nu^p}{p} - \frac{(v_{\nu-1} + c_{\nu-2})^{p^2} - v_{\nu-1}^{p^2}}{p^2} - \cdots - \frac{(v_1 + 1)^{p^\nu} - v_1^{p^\nu} - 1}{p^\nu},$$

$$z_\nu = -\frac{(v_\nu + \beta_\nu + z_{\nu-1})^p - v_\nu^p - \beta_\nu^p}{p} - \frac{(v_{\nu-1} + \beta_{\nu-1} + z_{\nu-2})^{p^2} - v_{\nu-1}^{p^2} - \beta_{\nu-1}^{p^2}}{p^2} - \cdots - \frac{(v_1 + \beta_1)^{p^\nu} - v_1^{p^\nu} - \beta_1^{p^\nu}}{p^\nu}$$

Lösungen der Differenzengleichung (7) im Körper Z_ν sind. Die p-Potenzen im Nenner stehen dabei nur formal da. Um die Brauchbarkeit der Elemente c_ν und z_ν aus (16) für den Erzeugungsmechanismus (5) zu zeigen, ist es nur noch notwendig, $S_\nu(c_\nu) = 1$ nachzuweisen. $S_1(c_1) = 1$ ist evident. Wegen

$$-c_\nu = \frac{(v_\nu + c_{\nu-1})^p - v_\nu^p}{p} + \cdots = v_\nu^{p-1} c_{\nu-1} + \cdots$$

folgt $S_\nu(c_\nu) = -S_\nu(v_\nu^{p-1} c_{\nu-1}) = S_{\nu-1}(c_{\nu-1}) = 1$ durch Induktion.

Nach diesem Existenzsatz hat es einen Sinn, das Normierungsproblem in folgender Weise zu entscheiden:

Für den Erzeugungsmechanismus (5) *sollen nur solche* c_ν *(mit* $S_\nu(c_\nu) = 1$*) und* z_ν *Verwendung finden, die sich in der Form* (8) *darstellen lassen.* c_ν und z_ν seien im folgenden in diesem Sinne beliebig, aber festbleibend ausgewählt. Durch diese Entscheidung ist auch die noch willkürliche additive Konstante in z_ν festgelegt. c_ν und z_ν besitzen die Eigenschaften (9) bis (12).

Mit dieser Normierung wird sich die Theorie des Artin- und des Normenrestsymbols einfach darstellen lassen.

Wird im folgenden mit den Elementen c_ν und z_ν in der Form (8) gerechnet, so müssen natürlich die v_i und β_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ wieder als Unbestimmte aufgefaßt und es muß im Körper der rationalen Zahlen gerechnet werden, ohne daß dies dann jedesmal wieder vermerkt wird.

Da für die Erzeugung eines Körpers Z_2 besonders einfache Verhältnisse vorliegen, wollen wir über diesen Fall noch die folgenden Einzelheiten anfügen.

Der Lösungsansatz (8) lautet für $\nu = 1$:

$$c_1(x_1) = f_1(x_1 + 1) - f_1(x_1) - f_1(1),$$
$$z_1(x_1; y_1) = f_1(x_1 + y_1) - f_1(x_1) - f_1(y_1).$$

Der Existenzbeweis wurde mit $f_1 = \frac{x_1^p}{p}$ geführt. Damit ergibt sich:

$$-c_1 = \frac{(x_1 + 1)^p - x_1^p - 1}{p} = \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{\mu} x_1^\mu$$

und

$$-z_1 = \frac{(x_1 + y_1)^p - x_1^p - y_1^p}{p} = \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{\mu} x_1^\mu y^{p-\mu}$$

Wegen $-\frac{1}{p}\binom{p}{\mu} \equiv \frac{(-1)^\mu}{\mu} \bmod p$ sehen wir, daß die Normierung der Erzeugung eines Körpers Z_2 mit folgenden abbrechenden Logarithmusreihen vorgenommen werden kann:

$$c_1(v_1) = \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{(-1)^\mu}{\mu} v_1^\mu \quad \text{und} \quad z_1(v_1, \beta_1) = \beta_1^p \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{(-1)^\mu}{\mu} \left(\frac{v_1}{\beta_1}\right)^\mu.$$

Wir können für f_1 auch $\binom{x_1}{p}$ setzen. Damit ergibt sich

$$c_1 = \binom{x_1 + 1}{p} - \binom{x_1}{p} = \binom{x_1}{p-1} \quad \text{und} \quad z_1 = \binom{x_1 + y_1}{p} - \binom{x_1}{p} - \binom{y_1}{p} = \sum_{\mu=1}^{p-1} \binom{x_1}{\mu}\binom{y_1}{p-\mu}.$$

Mit $c_1(v_1) = \binom{v_1}{p-1}$ ist also $z_1(v_1, \beta_1) = \sum_{\mu=1}^{p-1} \binom{v_1}{\mu}\binom{\beta_1}{p-\mu}$ eine Lösung der Differenzengleichung [9]).

Wegen $\binom{v_1}{p-1} = 1 - (v_1 + 1)^{p-1}$ ergibt sich hieraus eine Lösung der Artin-

[9]) Diese Lösung hat O. Teichmüller angegeben.

Schreierschen Differenzengleichung, indem man v_1 durch $v_1 - 1$ ersetzt. Es ist also

$$f = -\sum_{\mu=1}^{p-1} \binom{v_1 - 1}{\mu} \binom{\beta_1}{p - \mu}$$

eine Lösung von (4).

Die Assoziativitätsrelation bekommt für $\nu = 1$ die einfache Gestalt:

$$z_1(\xi, \eta) + z_1(\xi + \eta, \zeta) = z_1(\eta, \zeta) + z_1(\eta + \zeta, \xi).$$

3. Zerlegungs- und Verzweigungstheorie.

Jetzt setzen wir K als algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten über endlichem Konstantenkörper mit $q = p^f$ Elementen voraus. $\mathfrak{p}$ sei ein Primdivisor von K vom Grade m.

Der Körper Z_n sei durch (5) mit der durch uns getroffenen Normierung erzeugt. Die Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ seien durch zulässige Substitutionen

$$v_\nu \to v_\nu + \beta_\nu^{(0)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit $\beta_\nu^{(0)}$ aus K auf die Form

$$(17) \quad \beta_\nu \cong \frac{\mathfrak{g}_\nu}{\mathfrak{p}^{\lambda_\nu}} \qquad \left(\lambda_\nu \geqq 0; \quad \begin{array}{l} (\lambda_\nu, p) = 1 \text{ und } \mathfrak{g}_\nu \text{ prim zu } \mathfrak{p}, \text{ falls } \lambda_\nu > 0; \\ \mathfrak{g}_\nu \text{ ganz für } \mathfrak{p}, \text{ falls } \lambda_\nu = 0. \end{array}\right)$$

gebracht [10]). Da z_ν nach (8) ein Polynom in den x und y mit Koeffizienten aus dem Primkörper von K ist, können wir sofort feststellen:

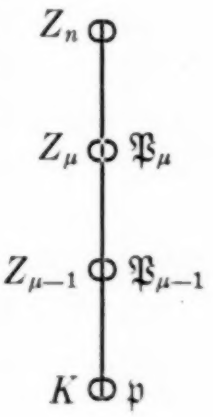
Der Primdivisor $\mathfrak{p}$ bleibt dann und nur dann im Körper Z_n unverzweigt, wenn

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

ist. Eine Verzweigung von $\mathfrak{p}$ in Z_n tritt also dann und nur dann ein, wenn von den in (17) erklärten Exponenten mindestens ein $\lambda_\nu > 0$ ist. Und zwar gilt genauer:

Ist in der Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der erste von Null verschiedene (also positive) Exponent λ_μ, so tritt eine Verzweigung nicht nur beim Übergang von $Z_{\mu-1}$ nach Z_μ, sondern auch bei allen folgenden Schritten von Z_ν nach $Z_{\nu+1}$ $(\nu = \mu, \mu + 1, \ldots, n)$ ein.

Dies ergibt sich sofort aus der Hilbertschen Theorie und aus der eindeutigen Bestimmtheit der Unterkörper Z_ν von Z_n. Es sei $\mathfrak{p} = \Pi \mathfrak{P}_{\mu-1}$, $\mathfrak{P}_{\mu-1} = \mathfrak{P}_\mu^p$ (siehe Figur!). Dann ist der Trägheitskörper von $\mathfrak{p}$ für Z_n über K gleich $Z_{\mu-1}$, der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}_\mu$ für Z_n über Z_μ daher gleich dem Kompositum $Z_{\mu-1} \times Z_\mu = Z_\mu$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}_\mu$ beim Übergang von Z_μ nach $Z_{\mu+1}$ verzweigt ist, w. z. b. w.



Ist insbesondere also schon $\lambda_1 > 0$, so tritt Vollverzweigung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{p^n}$ ein. Daraus folgt sofort ohne Rechnung der kürzlich von Tannaka bewiesene Satz [11]):

Es gibt unendlich viele Körper Z_n, in welchen endlich viele vorgegebene Primdivisoren $\mathfrak{p}_j$ voll verzweigt sind. (Analogon zum Grunwaldschen Existenztheorem).

Man braucht nur β_1 so zu wählen, daß für die endlich vielen Primdivisoren $\mathfrak{p}_j$ die Exponenten $\lambda_1^{(j)} > 0$ werden. Dies ist aber stets möglich.

Eine zur Verzweigungstheorie analoge Tatsache können wir auch im unverzweigten Falle feststellen:

---

[10]) Siehe H I.

[11]) T. Tannaka, Zyklische Zerfällungskörper der einfachen Ringe über dem algebraischen Funktionenkörper, Sci. Rep. Tohoku Univ. (1) **24** (1935).

Tritt beim Übergang von $Z_{\mu-1}$ nach Z_μ zum ersten Male Trägheit ein ($\mathfrak{P}_{\mu-1} = \mathfrak{P}_\mu$), *so gilt dies auch für alle folgenden Schritte, soweit sie überhaupt unverzweigt sind.*

Zum Beweis braucht man nur im vorigen Beweis den Begriff „Trägheitskörper" durch „Zerlegungskörper" zu ersetzen.

Durch diese Feststellungen werden die zunächst denkbaren 3^n Möglichkeiten für die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ in Z_n auf $\binom{n+2}{2}$ Möglichkeiten reduziert. Man beherrscht hiernach die Zerlegungstheorie vollkommen, wenn man noch die Frage entscheiden kann, ob im unverzweigten Falle $\mathfrak{p}$ in Z_n voll zerlegt ist oder nicht. Eine Antwort hierauf geben wir mit Hilfe der im folgenden zu entwickelnden Theorie des Artin-Symbols.

4. Das Artin-Symbol.

Der Primdivisor $\mathfrak{p}$ sei im Körper Z_n unverzweigt. In diesem Falle können wir den Artin-Automorphismus

$$F = \left(\frac{Z_n}{\mathfrak{p}}\right) = s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\}}$$

einführen. Für ihn gilt

$$z^F \equiv z^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{p}$$

für alle für $\mathfrak{p}$ ganzen z aus Z_n.

Diesem Automorphismus sind vermöge (6) umkehrbar eindeutig n Elemente des Primkörpers von K

$$\left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right]_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

zugeordnet, die der Beziehung

$$\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right]_\nu p^{\nu-1} \tag{19}$$

genügen. Der Verschiebungssatz für das Artin-Symbol, angewandt auf Z_ν über K ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), ergibt sofort

$$\left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right]_\nu = \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right]_\nu .$$

Die Reihe (18) können wir also abändern in

$$\left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right],$$

wobei wir ohne Mißverständnis die Klammerindizes weglassen können. (19) schreibt sich jetzt in der Form

$$\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\} = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] p^{\nu-1} .$$

Insbesondere ist

$$\left\{\frac{\beta_1}{\mathfrak{p}}\right\} = \left[\frac{\beta_1}{\mathfrak{p}}\right] \equiv \frac{P^{fm} - 1}{P - 1} \beta_1 \bmod \mathfrak{p}$$ [12])

---

[12]) P bedeutet den Operator $Px = x^p$.

das in HI eingeführte Symbol und

$$(20)\qquad \left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\} + \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] p^{\nu-1}.$$

Die eckigen Klammersymbole können wir nun rekursiv berechnen. Es gilt unter Berücksichtigung von $\Delta v_\nu = c_{\nu-1}$, von (20) und von

$$S_\nu(c) = \frac{s^{p^\nu} - 1}{s - 1} c_\nu = 1$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
\left(s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1\right) v_\nu &= \frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} \\
&= \frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\} + \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] p^{\nu-1}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} \\
&= \frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} + s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} \frac{s^{\left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] p^{\nu-1}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} \\
&= \frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} + \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} \cdot \frac{s^{p^{\nu-1}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} \\
&= \frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} + \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right].
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\left(s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1\right) v_\nu \equiv v_\nu^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} - v_\nu \equiv \frac{P^{fm} - 1}{P - 1} z_{\nu-1} + \left\{\frac{\beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\} \bmod \mathfrak{p}.$$

Also ergibt sich folgende Rekursionsformel [13]):

$$(21)\qquad \boxed{\left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] \equiv \left\{\frac{\beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\} + \frac{P^{fm} - 1}{P - 1} z_{\nu-1} - \frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1} \bmod \mathfrak{p}.}$$

Soweit gilt alles für beliebige Normierung. Jetzt wollen wir unsere spezielle Normierung benutzen und die Rekursionsformel (21) weiter auswerten.

Wird die rechte Seite von (21) explizit ausgerechnet und dabei jedes v auf einen Grad kleiner als p reduziert (wie dies nach dem Erzeugungsmechanismus (5) stets möglich ist), so müssen sich natürlich alle Glieder mit v aus Invarianzgründen wegheben. Führen wir die Bezeichnungen

$$\left(\frac{P^{fm} - 1}{P - 1} z_{\nu-1}\right)_{v=0} = \zeta_{\nu-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{s^{\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}}{\mathfrak{p}}\right\}} - 1}{s - 1} c_{\nu-1}\right)_{v=0} = \gamma_{\nu-1}$$

ein, wobei also das Nullsetzen erst nach Gradreduktion vorgenommen werden darf, so können wir (21) so schreiben:

$$(21\,a)\qquad \left[\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right] \equiv \left\{\frac{\beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\} + \zeta_{\nu-1} - \gamma_{\nu-1} \bmod \mathfrak{p}.$$

Es entsteht nun das Problem, die rechte Seite von (21 a) einfacher zu gestalten und zwar

[13]) Witt hat unabhängig von dieser Arbeit ebenfalls die Möglichkeit dieser Rekursion erkannt.

so, daß mod $\mathfrak{p}$ ihre Zugehörigkeit zum Primkörper von K evident wird. Wir beschränken uns auf die Vereinfachung des Gliedes $\zeta_{\nu-1}$, da $\gamma_{\nu-1}$ bei der Charakterisierung des Vollzerfallens, auf die es uns nachher ankommt, ersichtlich Null wird. Es gilt

$$\begin{aligned}\zeta_{\nu-1} &= \sum_{k=0}^{fm-1} z_{\nu-1}(v_1^{p^k}, v_2^{p^k}, \ldots, v_{\nu-1}^{p^k}; \beta_1^{p^k}, \beta_2^{p^k}, \ldots, \beta_{\nu-1}^{p^k})_{v=0} \\ &= \sum_{k=0}^{fm-1} f_{\nu-1}(v_1^{p^k} + \beta_1^{p^k}, \ldots, v_{\nu-1}^{p^k} + \beta_{\nu-1}^{p^k} + z_{\nu-2}(v_1^{p^k}, \ldots, v_{\nu-2}^{p^k}; \beta_1^{p^k}, \ldots, \beta_{\nu-2}^{p^k}))_{v=0} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{fm-1} f_{\nu-1}(v_1^{p^k}, v_2^{p^k}, \ldots, v_{\nu-1}^{p^k})_{v=0} - \sum_{k=0}^{fm-1} f_{\nu-1}(\beta_1^{p^k}, \beta_2^{p^k}, \ldots, \beta_{\nu-1}^{p^k}).\end{aligned}$$

Man sieht durch Induktion sofort, daß

$$\left[v_i^{p^{k-1}} + \beta_i^{p^{k-1}} + z_{i-1}(v_1^{p^{k-1}}, \ldots, v_{i-1}^{p^{k-1}}; \beta_1^{p^{k-1}}, \ldots, \beta_{i-1}^{p^{k-1}})\right]_{v=0} = (v_i^{p^k})_{v=0}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1).$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\zeta_{\nu-1} = f_{\nu-1}(v_1^{p^{fm-1}} + \beta_1^{p^{fm-1}}, \ldots, v_{\nu-1}^{p^{fm-1}} + \beta_{\nu-1}^{p^{fm-1}} + z_{\nu-2}(v_1^{p^{fm-1}}, \ldots; \beta_1^{p^{fm-1}}, \ldots))_{v=0} \\ - \sum_{k=0}^{fm-1} f_{\nu-1}(\beta_1^{p^k}, \ldots, \beta_{\nu-1}^{p^k}).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}&\left[v_i^{p^{fm-1}} + \beta_i^{p^{fm-1}} + z_{i-1}(v_1^{p^{fm-1}}, \ldots, v_{i-1}^{p^{fm-1}}; \beta_1^{p^{fm-1}}, \ldots, \beta_{i-1}^{p^{fm-1}})\right]_{v=0} \\ &\qquad = \frac{P^{fm}-1}{P-1}\beta_i + \sum_{k=0}^{fm-1} z_{i-1}(v_1^{p^k}, \ldots, v_{i-1}^{p^k}; \beta_1^{p^k}, \ldots, \beta_{i-1}^{p^k})_{v=0} \\ &\qquad = \frac{P^{fm}-1}{P-1}\beta_i + \zeta_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots;\ \zeta_0 = 0).\end{aligned}$$

Setzen wir dies in $\zeta_{\nu-1}$ ein, so erhalten wir

$$\boxed{\zeta_\nu = f_\nu\left(\frac{P^{fm}-1}{P-1}\beta_1, \frac{P^{fm}-1}{P-1}\beta_2 + \zeta_1, \ldots, \frac{P^{fm}-1}{P-1}\beta_\nu + \zeta_{\nu-1}\right) - \sum_{k=0}^{fm-1} f_\nu(\beta_1^{p^k}, \beta_2^{p^k}, \ldots, \beta_\nu^{p^k}).} \tag{22}$$

Beachten wir, daß die Konjugierten von β_i mod $\mathfrak{p}$

$$\beta_i, \beta_i^p, \beta_i^{p^2}, \ldots, \beta_i^{p^{fm-1}}$$

sind, so erkennen wir rekursiv aus (22), daß ζ_ν ein für jedes i in den Konjugierten von β_i symmetrischer Ausdruck ist, der demnach mod $\mathfrak{p}$ im Primkörper liegen muß.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vollzerlegtsein eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ von K in Z_n lautet jetzt nach (21a) und (22) so:

$$\left\{\frac{\beta_\nu}{\mathfrak{p}}\right\} + \zeta_{\nu-1} \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dies sind n nur von den β_i abhängige Kongruenzen.

5. Das Normenrestsymbol.

Um die Multiplikationsregeln für zwei zyklische Körper verschiedenen Grades aufstellen zu können, müssen wir unsere über c_ν und z_ν getroffene Normierung noch etwas verschärfen:

Es sollen in (8) nur solche Polynome f_ν verwendet werden, welche die Eigenschaften

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_\nu) = f_{\nu-r+1}(x_r, \ldots, x_\nu) + f_\nu(x_1, \ldots, x_{r-1}, 0, \ldots, 0) \tag{23}$$
$$(1 \leqq r \leqq \nu;\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

erfüllen.

Die für den Existenzbeweis verwendeten Polynome $f_\nu = -\sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_\nu^{p^{\nu-i+1}}}{p^{\nu-i+1}}$ besitzen offenbar auch die zusätzliche Eigenschaft (23). Aus (23) resultieren für z_ν die Eigenschaften

$$\text{(23a)} \quad \begin{aligned} &z_\nu(0, 0, \ldots, 0, x_\tau, x_{\tau+1}, \ldots, x_\nu; y_1, \ldots, y_\nu) = z_{\nu-\tau+1}(x_\tau, \ldots, x_\nu; y_\tau, \ldots, y_\nu) \\ &z_\nu(x_1, \ldots, x_\nu; 0, 0, \ldots, 0, y_\tau, y_{\tau+1}, \ldots, y_\nu) = z_{\nu-\tau+1}(x_\tau, \ldots, x_\nu; y_\tau, \ldots, y_\nu) . \end{aligned}$$

Wir definieren die zyklischen Algebren

$$H_n = K(u; v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} &\wp v_1 = \beta_1 && u^{p^n} = \alpha \\ &\wp v_2 = z_1 + \beta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots && u v_n u^{-1} = v_n + c_{n-1} \\ &\wp v_n = z_{n-1} + \beta_n \end{aligned}$$

und mit der für c_i und z_i von uns getroffenen verschärften Normierung. Es sei $\beta_1 \neq \wp\beta^{(0)}$ mit $\beta^{(0)}$ aus K. H_n ist dann vom Grade p^n.

In geläufiger Weise sei das Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\alpha, Z_n}{\mathfrak{p}}\right)$$

aus der $\mathfrak{p}$-Invariante von H_n definiert. Dem Gruppenelement $\left(\frac{\alpha, Z_n}{\mathfrak{p}}\right)$ sei durch die Festsetzung

$$\left(\frac{\alpha, Z_n}{\mathfrak{p}}\right) = s^{\left\{\frac{\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\}}$$

das spezielle Normenrestsymbol

$$\left\{\frac{\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\} \bmod p^n$$

und diesem weiter das isomorphe multiplikative Symbol

$$\left(\frac{\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p^n}\left\{\frac{\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

zugeordnet. Entsprechend sei für das Artin-Symbol

$$\left(\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p^n}\left\{\frac{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\}\right) .$$

Außer dem vorderen Zerlegungssatz

$$\left(\frac{\alpha\alpha'; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha'; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right)$$

gelten für das Normenrestsymbol auch hintere Zerlegungssätze, die jetzt in den entsprechenden Algebrenregeln hergeleitet werden sollen. Bei ihrem Beweis werden die Assoziativitätsrelation, die Symmetrieeigenschaft und die Eigenschaft (23a) von z_ν eine hervorragende Rolle spielen.

Neben H_n betrachten wir die zyklische Algebra

$$H'_{n-k} = K(u'; v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-k}) = (\alpha'; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-k}]$$

vom Grade p^{n-k} $(0 \leqq k < n)$ mit

$$\begin{aligned} &\wp v'_1 = \beta'_1 && (u')^{p^{n-k}} = \alpha' \\ &\wp v'_2 = z_1 + \beta'_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots && u' v'_{n-k} (u')^{-1} = v'_{n-k} + c_{n-k-1} . \\ &\wp v'_{n-k} = z_{n-k-1} + \beta'_{n-k} \end{aligned}$$

Wir bilden

$$H_n \times H'_{n-k} = K(u; v_1, v_2, \ldots, v_n \mid u'; v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-k}),$$

wobei die gestrichenen Operatoren mit den ungestrichenen vertauschbar sind. Wir führen folgende Transformation der Operatoren aus:

$$\text{(24)}\quad \begin{aligned} &1.\quad \bar{u} = u;\ \bar{v}_i = v_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, k \\ &\quad \bar{v}_{k+1} = v_{k+1} + v'_1 \\ &\quad \bar{v}_{k+2} = v_{k+2} + v'_2 + z_1(v_{k+1}; v'_1) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \bar{v}_n = v_n + v'_{n-k} + z_{n-k-1}(v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}; v'_1, \ldots, v'_{n-k-1}). \\ &2.\quad \bar{u}' = u'(u^{p^k})^{-1};\ \bar{v}'_j = v'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-k). \end{aligned}$$

Über die neuen Operatoren stellen wir in mehreren Schritten fest:

a) *Die Transformationsgleichungen* (24) *sind nach den ursprünglichen Operatoren auflösbar. Es ist also*

$$K(u; v_1, v_2, \ldots, v_n \mid u'; v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-k}) = K(\bar{u}; \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \mid \bar{u}'; \bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \ldots, \bar{v}'_{n-k}).$$

b) *Es ist*

$$K(\bar{u}'; \bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \ldots, \bar{v}'_{n-k}) = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-k}\right].$$

c) *Es gilt*

$$\text{(25)}\quad \wp\bar{v}_i = z_{i-1}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{i-1}; \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_{i-1}) + \bar{\beta}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit

$$\bar{\beta}_i = \beta_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, k$$

und

$$\bar{\beta}_i = \beta_i + \beta'_{i-k} + z_{i-k-1}(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{i-1}; \beta'_1, \ldots, \beta'_{i-k-1}) \quad \text{für} \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Beweis. Für $i = 1, 2, \ldots, k$ ist (25) evident. Soll (25) auch für $i = k+1, k+2, \ldots, n$ gelten, so muß folgende Identität erfüllt sein:

$$\text{(26)}\quad \begin{aligned} &z_{i-1}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1}; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{i-1}) + z_{i-k-1}(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{i-1}; \beta'_1, \ldots, \beta'_{i-k-1}) \\ &= z_{i-1}(v_1, \ldots, v_{i-1}; \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}) + z_{i-k-1}(v'_1, \ldots, v'_{i-k-1}; \beta'_1, \ldots, \beta'_{i-k-1}) \\ &+ z_{i-k-1}(v_{k+1} + \beta_{k+1} + z_k(v_1, \ldots; \beta_1, \ldots), \ldots; v'_1 + \beta'_1, \ldots, v'_{i-k-1} + \beta'_{i-k-1} + z_{i-k-2}(v'_1, \ldots; \beta'_1, \ldots)) \\ &\qquad - z_{i-k-1}(v_{k+1}, \ldots, v_{i-1}; v'_1, \ldots, v'_{i-k-1}). \end{aligned}$$

Nun beachten wir die Assoziativitätsrelation (12) und die Eigenschaft (23a) von z_ν. In (12) ersetzen wir ν durch $i-k-1$ und geben den Unabhängigen ξ, η, ζ folgende Werte:

$$\xi_j = v'_j, \quad \eta_i = \beta'_j, \quad \zeta_j = \beta_{k+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-k-1).$$

Dann geht (12) über in

$$\text{(27a)}\quad \begin{aligned} &z_{i-k-1}(\beta'_1 + \beta_{k+1}, \ldots, \beta'_{i-k-1} + \beta_{i-1} + z_{i-k-2}(\beta'_1, \ldots; \beta_{k+1}, \ldots); v'_1, \ldots, v'_{i-k-1}) \\ &\qquad + z_{i-k-1}(\beta'_1, \ldots, \beta'_{i-k-1}; \beta_{k+1}, \ldots, \beta_{i-1}) \\ &= z_{i-k-1}(v'_1 + \beta'_1, \ldots, v'_{i-k-1} + \beta'_{i-k-1} + z_{i-k-2}(v'_1, \ldots, \beta'_1, \ldots); \beta_{k+1}, \ldots, \beta_{i-1}) \\ &\qquad + z_{i-k-1}(v'_1, \ldots, v'_{i-k-1}; \beta'_1, \ldots, \beta'_{i-k-1}). \end{aligned}$$

Ersetzen wir in (12) ν durch $i-1$ und geben den Unabhängigen ξ, η, ζ die Werte

$\xi_j = v_j$ für $j = 1, 2, \ldots, i-1$,

$\eta_j = 0,\ \zeta_j = \beta_j$ für $j = 1, 2, \ldots, k$,

$\eta_j = v'_{j-k},\ \zeta_j = \beta_j + \beta'_{j-k} + z_{j-k-1}(\beta_{k+1}, \ldots, \beta'_1, \ldots)$ für $j = k+1,\ k+2, \ldots, i-1$,

so geht (12) unter Beachtung von (23a) über in

$$\begin{aligned}(27b)\qquad & z_{i-1}(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{i-1};\bar{\beta}_1,\ldots,\bar{\beta}_{i-1})+z_{i-k-1}(v_{k+1},\ldots,v_{i-1};v_1',\ldots,v_{i-k-1}')\\ &=z_{i-1}(\beta_1,\ldots,\beta_k,v_1'+\beta_{k+1}+\beta_1',\ldots;v_1,\ldots,v_{i-1})\\ &+z_{i-k-1}(v_1',\ldots,v_{i-k-1}';\beta_{k+1}+\beta_1',\ldots,\beta_{i-1}+\beta_{i-k-1}'+z_{i-k-2}(\beta_{k+1},\ldots;\beta_1',\ldots)).\end{aligned}$$

Ersetzen wir in (12) ν wieder durch $i-1$ und geben den Unabhängigen ξ, η, ζ die Werte

$\xi_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, k$,
$\xi_j = v_{j-k}' + \beta_{j-k}' + z_{j-k-1}(v_1', \ldots; \beta_1', \ldots)$ für $j = k+1, k+2, \ldots, i-1$,
$\eta_j = \beta_j, \zeta_j = v_j$ für $j = 1, 2, \ldots, i-1$,

so geht (12) unter Beachtung von (23a) über in

$$\begin{aligned}(27c)\qquad & z_{i-1}(\beta_1,\ldots,\beta_k,v_1'+\beta_1'+\beta_{k+1},\ldots;v_1,\ldots,v_{i-1})\\ &+z_{i-k-1}(v_1'+\beta_1',\ldots,v_{i-k-1}'+\beta_{i-k-1}'+z_{i-k-2}(v_1',\ldots;\beta_1',\ldots);\beta_{k+1},\ldots,\beta_{i-1})\\ &=z_{i-k-1}(v_{k+1}+\beta_{k+1}+z_k(v_1,\ldots;\beta_1,\ldots),\ldots;v_1'+\beta_1',\ldots)\\ &\qquad+z_{i-1}(v_1,\ldots,v_{i-1};\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}).\end{aligned}$$

Die Summation von (27a), (27b) und (27c) gibt gerade die Identität (26). Damit ist die Richtigkeit von (26) erwiesen.

d) *Es gilt*

$$(28)\qquad \bar{u}\,\bar{v}_i\,\bar{u}^{-1} = \bar{v}_i + c_{i-1}(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (25) und (28) folgt dann

$$K(\bar{u};\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_n) = (\alpha;\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\ldots,\bar{\beta}_n].$$

(28) ist für $i \leqq k$ trivial. Soll (28) auch für $i > k$ richtig sein, so muß die Identität

$$\begin{aligned}(28a)\quad & z_{i-k-1}(v_{k+1}+c_k,\ldots,v_{i-1}+c_{i-2};\ v_1',\ldots,v_{i-k-1}')-z_{i-k-1}(v_{k+1},\ldots,v_{i-1};\ v_1',\ldots,v_{i-k-1}')\\ &=c_{i-1}(\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{i-1})-c_{i-1}(v_1,\ldots,v_{i-1})\end{aligned}$$

erfüllt sein. (28a) folgt aber unter Beachtung von (23a) sofort aus (7), wenn wir in (7)

$$\nu = i-1,\ \beta_j = 0 \text{ für } j \leqq k \text{ und } \beta_j = v_{j-k}' \text{ für } j = k+1, k+2, \ldots, i-1$$

setzen.

e) *Die Operatoren $\bar{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind mit dem Operator $\bar{u}'$ vertauschbar.*

Dazu müssen wir zeigen, daß

$$(29)\qquad (u^{p^k})\,\bar{v}_i(u^{p^k})^{-1} = (u')\,\bar{v}_i(u')^{-1}.$$

(29) beweisen wir mit Hilfe der sofort ersichtlichen Tatsache:

$$(u^{p^k})\,v_j(u^{p^k})^{-1} = v_j \quad \text{für} \quad j \leqq k$$

und

$$(u^{p^k})\,v_j(u^{p^k})^{-1} = v_j + c_{j-k-1}(v_{k+1},\ldots,v_{j-1}) \quad \text{für} \quad k < j \leqq i.$$

Damit geht über (29) in

$$\begin{aligned}(29a)\quad & c_{i-k-1}(v_{k+1},\ldots,v_{i-1})+z_{i-k-1}(v_{k+1}+1,\ldots,v_{i-1}+c_{i-k-2}(v_{k+1},\ldots,v_{i-2});v_1',\ldots,v_{i-k-1}')\\ &=c_{i-k-1}(v_1',\ldots,v_{i-k-1}')+z_{i-k-1}(v_{k+1},\ldots,v_{i-1};v_1'+1,\ldots,v_{i-k-1}'+c_{i-k-2}(v_1',\ldots,v_{i-k-2})).\end{aligned}$$

(29a) entsteht aber durch Subtraktion zweier Relationen (7) mit $\nu = i-k-1$. Wir ersetzen einfach das eine Mal

$$v_j \text{ durch } v_{j+k}, \qquad \beta_j \text{ durch } v_j',$$

und das andere Mal

$$v_j \text{ durch } v_j', \qquad \beta_j \text{ durch } v_{j+k}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-k-1).$$

Aus a) bis e) zusammen folgern wir:

$$K(\bar{u}; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \mid \bar{u}'; \bar{v}'_1, \ldots, \bar{v}_{n-k}) = (\alpha; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n] \times \left(\frac{\alpha'}{\alpha}; \beta'_1, \ldots, \beta'_{n-k}\right] .$$

Für $\alpha = \alpha'$ ergibt sich daher die grundlegende Algebrenregel:

$$(30) \quad \boxed{\begin{array}{l}(\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] \times (\alpha; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-k}] \\ \sim (\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1} + \beta'_1, \beta_{k+2} + \beta'_2 + z_1(\beta_{k+1}; \beta'_1), \ldots, \beta_n + \beta'_{n-k} + z_{n-k-1}(\beta_{k+1}, \ldots; \beta'_1, \ldots)].\end{array}}$$

Insbesondere gilt für die Multiplikation zweier Algebren vom gleichen Grade ($k = 0$):

$$\boxed{(\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n] \times (\alpha; \beta'_1, \ldots, \beta'_n] \sim (\alpha; \beta_1 + \beta'_1, \beta_2 + \beta'_2 + z_1(\beta_1; \beta'_1), \ldots, \beta_n + \beta'_n + z_{n-1}(\beta_1, \ldots; \beta'_1, \ldots)].}$$ [14])

Setzen wir in (30) $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_n = 0$ und ändern in den β'_i die Bezeichnungen, so entsteht aus (30) wegen (9) die Regel:

$$(30\text{b}) \quad \boxed{(\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, 0, 0, \ldots, 0]_n \times (\alpha; \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n] \sim (\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n].}$$

Der angefügte Index n soll andeuten, daß die Algebra vom Grade p^n ist.

Durch Iteration von (30b) erhalten wir schließlich die Regel:

$$(30\text{c}) \quad \boxed{(\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] \sim (\alpha; \beta_1, 0, \ldots, 0]_n \times (\alpha; \beta_2, 0, \ldots, 0]_{n-1} \times \cdots \times (\alpha; \beta_n]_1 .}$$

Es entsteht nun die Frage der Transformation der Algebra H_n auf eine unverzweigte Darstellung für die Stelle $\mathfrak{p}$. Diese Frage ist für $n = 1$ durch die Formel

$$(\alpha, \beta]_{\mathfrak{p}} = \left(\pi, \ \text{Res}\ \beta \frac{d\alpha}{\alpha}\right]_{\mathfrak{p}} \qquad (\pi \text{ Primelement zu } \mathfrak{p})$$

gelöst. Unter Berücksichtigung unseres Ergebnisses in der Verzweigungstheorie lehrt die Regel (30b), daß jede verzweigte Algebra H_n, falls sie nicht selbst schon vollverzweigt ist, als Produkt einer vollverzweigten Algebra H_{n-k} und einer unverzweigten Algebra H_n dargestellt werden kann. Zusammen mit der Regel (30c) besagt dies, daß wir uns bei der Aufsuchung einer unverzweigten Darstellung auf die Untersuchung des vollverzweigten Typus

$$(\alpha; \beta, 0, 0, \ldots, 0]$$

beschränken können.

Das in meiner Dissertation [15]) aufgestellte *Reziprozitätsgesetz der Potenzreste* ist auf Körper Z_n verallgemeinerungsfähig. Es ist unter Benutzung der Produktformel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

rein formal herleitbar.

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ und $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ seien die erzeugenden Parameter der Körper Z_n und Z'_n mit den Führern $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$. Die Divisoren von β_ν und β'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) werden so zerlegt:

---

[14]) Hier müssen wir auch noch $\beta_1 + \beta'_1 \neq \wp\beta_1^{(0)}$ mit $\beta_1^{(0)}$ aus K voraussetzen. (30a) gilt natürlich auch ohne die verschärfte Normierung.

[15]) H. L. Schmid, Über das Reziprozitätsgesetz in relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper, Math. Zeitschr. **40** (1935).

$$\beta_\nu \cong \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}'_\nu \quad \text{mit} \quad \begin{cases} (\mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{f}') = 1 \\ \mathfrak{c}'_\nu \text{ nur aus Primteilern von } \mathfrak{f}' \text{ zusammengesetzt,} \end{cases}$$

$$\beta'_\nu \cong \mathfrak{b}'_\nu \mathfrak{c}_\nu \quad \text{mit} \quad \begin{cases} (\mathfrak{b}'_\nu, \mathfrak{f}) = 1 \\ \mathfrak{c}_\nu \text{ nur aus Primteilern von } \mathfrak{f} \text{ zusammengesetzt.} \end{cases}$$

Man zeigt dann leicht beitragsweise:

$$\left\{\frac{\beta_1, \ldots, \beta_n}{\prod_{\nu=1}^{n} \mathfrak{b}'_\nu}\right\} - \left\{\frac{\beta'_1, \ldots, \beta'_n}{\prod_{\nu=1}^{n} \mathfrak{b}_\nu}\right\} = \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \left\{\frac{\prod_{\nu=1}^{n} \beta'_\nu;\ \beta_1, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right\} - \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}'} \left\{\frac{\prod_{\nu=1}^{n} \beta_\nu;\ \beta'_1, \ldots, \beta'_\nu}{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Mit der Produktformel ergibt sich dann ohne weiteres:

$$\boxed{\left(\frac{\beta_1, \ldots, \beta_n}{\prod_{\nu=1}^{n} \mathfrak{b}'_\nu}\right)\left(\frac{\beta'_1, \ldots, \beta'_n}{\prod_{\nu=1}^{n} \mathfrak{b}_\nu}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}'} \left(\frac{\prod_{\nu=1}^{n} \beta_\nu;\ \beta'_1, \ldots, \beta'_n}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \left(\frac{\prod_{\nu=0}^{n} \beta'_\nu;\ \beta_1, \ldots, \beta_n}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.}$$

Eingegangen 6. Januar 1936.

Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum.

Von *Max Deuring* in Leipzig.

---

1. K sei eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers k. Die Klassen der einfachen normalen Algebra über k, die von K zerfällt werden, bilden eine Gruppe. In dem besonderen Fall, daß k ein endlicher Zahlkörper und K/k galoissch ist, kennzeichnet diese Gruppe den Körper K[1]). Wenn man diese Kennzeichnung zur Untersuchung der Eigenschaften von K verwenden will, so stellt sich als eine der ersten Fragen die nach der Beziehung der zu K gehörigen Algebrenklassengruppe zu den Algebrenklassengruppen, die zu den Teilkörpern von K gehören.

Wir bezeichnen die einfachen normalen Algebren über k, in denen K als maximaler Teilkörper enthalten ist, mit $\mathfrak{A}_k^K, \mathfrak{B}_k^K, \ldots$, und die Gruppe der von K zerfällten einfachen normalen Algebrenklassen über k mit G_k^K.

2. Es sei jetzt $k_0 \subseteqq k_1 \subseteqq k_2$. In einer Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ bildet die Gesamtheit aller mit k_1 elementweise vertauschbaren Elemente eine einfache Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$. Das folgt aus einem bekannten Satz der Algebrentheorie [2]). Über diese Zuordnung einer Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ zu jeder Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ gilt der folgende

Satz 1. *k_2 sei separabel von endlichem Grade über k_0, $k_0 \subseteqq k_1 \subseteqq k_2$. Die Zuordnung $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2} \to \overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ ist ein Isomorphismus der Faktorgruppe $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ mit einer Untergruppe von $G_{k_1}^{k_2}$.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß der Satz wohl auch für inseparable k_2 richtig ist. Jedoch ist der folgende Beweis auf separable k_2 zugeschnitten.

Wir zeigen zuerst, daß die Klasse der Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ durch die Klasse von $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ eindeutig bestimmt ist: jeder zu k_2 isomorphe Teilkörper k_2' von $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ ist von der Gestalt $g^{-1}k_2 g$, das zugehörige $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2'}$ ist dann $g^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2} g$, also eine zu $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ isomorphe Algebra.

Wir betten k_2 in einen über k_0 galoisschen Körper K mit der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ ein. k_i gehöre zur Untergruppe $\mathfrak{G}_i$.

$G_{k_0}^{k_i}$ ist isomorph zu der Gruppe solcher Klassen assoziierter Faktorensysteme von K/k_0, die Faktorensysteme $a_{\sigma,\tau}^{(i)}$ mit $a_{\sigma,\tau}^{(i)} = 1$ für σ und τ aus $\mathfrak{G}_i$ enthalten:

$$G_{k_0}^{k_i} \cong (a_{\sigma,\tau}^{(i)}\, c_\sigma^T)/(c_\sigma^T) \cong (a_{\sigma,\tau}^{(i)})/(a_{\sigma,\tau}^{(i)} \frown c_\sigma^T).$$

$c_\sigma^T = c_\sigma^\tau c_\tau / c_{\sigma\tau}$ liegt dann und nur dann in $a_{\sigma,\tau}^{(i)}$, wenn es ein b gibt, mit dem sich die c_σ für σ aus $\mathfrak{G}_i$ in der Form $c_\sigma = b^{1-\sigma}$ darstellen lassen. Für $c_\sigma^* = c_\sigma b^{\sigma-1}$ (σ aus $\mathfrak{G}_i$) ist dann $c_\sigma^{*T} = c_\sigma^T$, aber $c_\sigma^* = 1$ für σ aus $\mathfrak{G}_i$. Daher ist

---

[1]) Vgl. R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, J. f. reine u. angew. Math. **167** (1932), 399—404; vgl. auch M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. IV, 1 (1935), S. 122, Satz 11.

[2]) Vgl. etwa M. Deuring, loc. cit. S. 44, Satz 6.

$$G_{k_0}^{k_i} \cong (a_{\sigma,\tau}^{(i)})/(c_\sigma^{(i)T})$$

mit $a_{\sigma,\tau}^{(i)} = c_\sigma^{(i)} = 1$ für σ und τ aus $\mathfrak{G}_i$.

Die in Satz 1 beschriebene Zuordnung $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2} \to \overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ vollzieht sich an den Faktorensystemen, indem der Klasse $(a_{\sigma,\tau}^{(2)})$ die Klasse des nur auf die Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ sich beziehenden Teils $(a_{\sigma,\tau}^{(2)*})$ zugeordnet wird. Diese Zuordnung ist ein Homomorphismus, bei dem gerade die Klassen $(a_{\sigma,\tau}^{(1)})$ in 1 übergehen. Das ist die Behauptung [3]).

3. Die Bestimmung der genauen Untergruppe von $G_{k_1}^{k_2}$, die zu $G_{k_1}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ isomorph ist, gelingt nicht allgemein. Wir führen sie zuerst für $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper, und dann darauf aufbauend für algebraische Zahlkörper durch [4]).

Die Körper k_i seien jetzt $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper. Das Primideal eines Körpers k_i, W, T, ... bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_{k_i}$, $\mathfrak{p}_W$, $\mathfrak{p}_T$, ...

Die Gruppe $G_{k_0}^{k_i}$ ist zyklisch von der Ordnung $(k_i : k_0)$ und ebenso ist $G_{k_1}^{k_2}$ zyklisch von der Ordnung $(k_2 : k_1)$. Daraus folgt, daß $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ mit der ganzen Gruppe $G_{k_1}^{k_2}$ isomorph ist.

Die $\mathfrak{p}$-adischen Algebren können durch ihre *Invarianten* gekennzeichnet werden. Die Invariante von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ muß daher aus der Invariante von $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ abgeleitet werden können. Das geschieht durch

Satz 2. *$\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ bestimmt sich aus $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ mittels der Beziehung*

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_1}}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right)(k_1 : k_0) \pmod 1. \tag{1}$$

Beweis. Für eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ handelt es sich um endlich viele triviale Fälle. Daher setzen wir $\mathfrak{p}$ als endliche Primstelle voraus.

In k_1 liegt ein Körper T, der unverzweigt über k_0 ist, während k_1 rein verzweigt über T ist; d. h. es ist $\mathfrak{p}_{k_0} = \mathfrak{p}_T$ und $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_{k_1}^{(k_1:T)}$. Wir beweisen zuerst

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right)(T : k_0) \pmod 1. \tag{2}$$

$\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ enthält einen über k_0 unverzweigten Teilkörper W', und W' enthält einen zu T isomorphen Teilkörper T'. In $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ gibt es also ein Element g, das T' in T transformiert: $g^{-1} T' g = T$. Wir setzen $g^{-1} W' g = W$.

Ist φ die Frobeniussubstitution von W/k_0, so kann $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ als zyklische Algebra

$$\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2} = (a, W, \varphi)$$

geschrieben werden, und wenn a genau die Potenz $\mathfrak{p}_{k_0}^s$ von $\mathfrak{p}_{k_0}$ enthält, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right) \equiv \frac{s}{(W : k_0)} \pmod 1.$$

W ist offenbar auch ein maximaler Teilkörper von $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$, und $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ hat die zyklische Darstellung

$$\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2} = (a, W, \varphi^{(T:k_0)}).$$

---

[3]) Für diesen Beweis vergleiche man die Theorie der Faktorensysteme etwa bei Deuring, loc. cit. Kap. V.

[4]) Für die Theorie der $\mathfrak{p}$-adischen Algebren muß verwiesen werden auf H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme, Math. Ann. **104** (1931), 495—534, oder auf Deuring, loc. cit. Kap. VII § 2.

Da $\varphi^{(T:k_0)}$ gerade die Frobeniussubstitution von W/T ist, so ist

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right) \equiv \frac{s}{(W:T)} \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right)(T:k_0) \pmod 1.$$

Das ist (2).

Zum Beweis von (1) muß jetzt

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right) \equiv \left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right)(k_1:T) \pmod 1 \tag{3}$$

gezeigt werden. Nach Satz 1 genügt es, diesen Nachweis für eine Divisionsalgebra $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ zu führen; denn jede Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ ist einer Potenz einer Divisionsalgebra äquivalent.

$\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ enthält einen Teilkörper V, der zu der unverzweigten Erweiterung $(k_2 : k_1)$-ten Grades von k_1 isomorph ist. Wir können annehmen, daß k_1 in V enthalten ist, indem wir nötigenfalls wie beim Beweis von (2) noch zu $g^{-1}Vg$ übergehen. Der Trägheitskörper U von $\mathfrak{p}_V$ hat wegen $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_{k_1}^{(k_1:T)} = \mathfrak{p}_V^{(k_1:T)}$ den Grad $(V:k_1)$ über k_1. Da er galoissch über T ist und mit k_1 wegen seiner Unverzweigtheit den Durchschnitt T hat, so ist $V = k_1 U$. U können wir wie beim Beweis von (2) in einen unverzweigten Teilkörper $(k_2 : T)$-ten Grades W von $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ einbetten. Ist jetzt x ein solches Element von $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$, das als Transformator den Frobeniusautomorphismus φ von W/T erzeugt, und enthält x die r-te Potenz des Primideals $\mathfrak{P}$ von $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$, so ist

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right) \equiv \frac{r}{(k_2:T)} \pmod 1.$$

Denn es ist $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2} = (a, W, \varphi)$ mit $x^{(k_2:T)} = a$ und $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{P}^{(k_2:T)}$, weil $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ als Divisionsalgebra vorausgesetzt worden ist. φ ist, allein für U betrachtet, die Frobeniussubstitution von U/T. φ kann dann auf V/k übertragen werden, und da k_1 die gleiche Restklassenzahl wie T hat, so ist φ auch die Frobeniussubstitution von V/k_1. y sei ein Element von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2} = \overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{V}$, das als Transformator diesen Automorphismus von V/k_1 erzeugt. $z = x^{-1}y$ ist dann mit U elementweise vertauschbar, liegt also in $\overline{\mathfrak{A}}_U^{k_2}$. Bedeutet $\mathfrak{P}'$ das Primideal von $\overline{\mathfrak{A}}_U^{k_2}$, so gilt $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_U = \mathfrak{P}'^{(k_2:U)} = \mathfrak{P}'^{(k_1:T)}$, also $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^{(k_2:k_1)}$. Geht $\mathfrak{P}$ in y mit der Potenz $\mathfrak{P}^t$ ein, so muß demnach

$$r \equiv t \pmod{(k_2:k_1)}$$

gelten. Das Primideal von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ ist $\mathfrak{P}$, weil seine $(k_2:k_1)$-te Potenz gleich $\mathfrak{p}_{k_1} = \mathfrak{p}_T^{\frac{1}{(k_1:T)}}$ sein muß. Demnach haben wir

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_1}}\right) \equiv \frac{t}{(k_2:k_1)} \equiv \frac{r}{(k_2:k_1)} \equiv \left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right)(k_1:T) \pmod 1.$$

Das ist (3).

4. Wir behandeln jetzt den Fall, daß die k_i endliche algebraische Zahlkörper sind [5]). $\mathfrak{p}$ sei eine Primstelle von k_0, $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_g'$ ihre Primteiler in k_1 und $\mathfrak{p}_{i1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{iG_i}''$ die Primteiler von $\mathfrak{p}_i'$ in k_2. Ferner bezeichnen wir den $\mathfrak{p}_i'$-Grad von k_1/k_0 mit $n(\mathfrak{p})_i$ und den $\mathfrak{p}_{ij}''$-Grad von k_2/k_0 mit $N(\mathfrak{p})_{ij}$. Eine Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_0}^{k_2}$ ist durch ihre Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ gekennzeichnet. Dabei erfüllen die Invarianten die drei Bedingungen:

---

[5]) Für das Folgende: H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe, Math. Ann. **107** (1933), 731—760, und Deuring, loc. cit. Kap. VII, § 5.

(4) nur endlich viele Invarianten sind $\not\equiv 0 \pmod 1$,

$$(5) \qquad N(\mathfrak{p})_{ij}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1,$$

$$(6) \qquad \sum_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1.$$

Aber diese Bedingungen sind die einzigen: zu jedem Invariantensystem, das (4), (5), (6) erfüllt, gibt es eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$.

Die in einer Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ durch k_1 festgelegte Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ finden wir nach Satz 2 durch die Invariantenrelationen

$$(7) \qquad \left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right) \equiv n(\mathfrak{p})_i\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \pmod 1,$$

die zur Bestimmung der Klasse von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ hinreichen.

5. Die im Titel dieser Arbeit formulierte Frage, das heißt also die Bestimmung der genauen Untergruppe von $G_{k_1}^{k_2}$, die zu $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ isomorph ist, läuft für den Fall der Zahlkörper darauf hinaus, das Kongruenzensystem (7) bei gegebenen $\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right)$ nach den $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ so aufzulösen, daß die Lösungen $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ die Bedingungen (4), (5) und (6) erfüllen. Es ergibt sich also sofort

Satz 3. *Damit die Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ eingebettet werden kann, müssen die Kongruenzensysteme — zu jedem $\mathfrak{p}$ eines —*

$$n(\mathfrak{p})_i\, x_{\mathfrak{p}} \equiv \left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right) \pmod 1$$

verträglich sein.

Insbesondere: Wenn k_1 über k_0 galoissch ist, so ist es für die Einbettbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ notwendig, daß $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ an bezüglich k_0 konjugierten Primstellen gleiche Invarianten hat.

Es ist leicht einzusehen, daß man, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ immer so bestimmen kann, daß sie (4) und (5) erfüllen. Die Schwierigkeit liegt bei (6). Aus der Voraussetzung

$$\sum_{\mathfrak{p}_i'}\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

folgt nämlich durch Addition der Kongruenzen (7) nur

$$(8) \qquad (k_1 : k_0)\sum_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1.$$

Wir zeigen an einem Beispiel, daß die Bedingung von Satz 3 im allgemeinen zur Einbettbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ nicht ausreicht.

q sei eine Primzahl. Es sei k_1/k_0 abelsch vom Typus (q, q) und k_2/k_1 zyklisch vom Grade q^2. Wir betrachten eine feste Primstelle $\mathfrak{p}$ von k_0, deren Zerlegung in k_1 durch $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1' \cdots \mathfrak{p}_{q^2}'$ gegeben sei, während die $\mathfrak{p}_i'$ in k_2 unzerlegt bleiben. Es gibt eine Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$, deren Invarianten an den Stellen $\mathfrak{p}_i'$ sämtlich $\frac{1}{q^2}$ sind, während die Invarianten

an allen übrigen Primstellen 0 sind. Die Bedingung von Satz 3 ist erfüllt. Für $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ erhalten wir aus (7) eindeutig den Wert $\frac{1}{q^2}$. Für alle übrigen $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{r}}\right)$, $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{p}$, folgt aus (7) $q\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$. Es ist daher

$$q\sum_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \frac{1}{q^2} \pmod 1$$

und gewiß nicht

$$\sum_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1.$$

Es gilt indessen der

Satz 4. *Wenn k_1 über k_0 zyklisch ist, so ist $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ dann und nur dann in eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ einbettbar, wenn $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ an in bezug auf k_0 konjugierten Primstellen gleiche Invarianten hat.*

Der Beweis ergibt sich aus dem Vorhandensein unendlich vieler Primideale $\mathfrak{p}$ von k_0, die in k_1 nicht zerfallen. Hat man die $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ irgendwie so bestimmt, daß (4), (5) und (7) erfüllt sind, so kann man wegen (8) für ein unzerlegt bleibendes $\mathfrak{p}$ die Invariante $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ um ein solches ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{(k_1 : k_0)}$ abändern, daß (6) erfüllt wird [6]).

Es zeigt sich also hier ähnlich wie in der Klassenkörpertheorie ein besonders einfaches Verhalten der zyklischen Körper.

Die in Satz 3 ausgesprochene Bedingung für die Einbettbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ reicht auch dann hin, wenn $(k_2 : k_1)$ zu $(k_1 : k_0)$ teilerfremd ist. Das folgt aus (8).

[6]) Die Existenz der unzerlegt bleibenden Primideale kann nur transzendent bewiesen werden. Indessen kommt man, wie leicht zu sehen, auch mit der arithmetisch beweisbaren Existenz von Primidealen in k_0 aus, deren Primfaktoren in k_1 Grade haben, die durch eine gegebene in $(k_1 : k_0)$ aufgehende Primzahlpotenz teilbar sind.

Eingegangen 8. Januar 1936.

Eine Cremonasche Raumgeometrie.

Von *H. Beck* in Bonn.

Gewöhnlich ergänzt man den Raum der Punkte (x, y, z) durch *eine* unendlich ferne Ebene. Es geht aber auch mit zweien.

So entsteht eine Geometrie, die durch eine elfgliedrige Gruppe von Cremonaschen Punkttransformationen beherrscht wird. Sie bildet ein natürliches Anwendungsgebiet für die Algebra eines Systems höherer komplexer Zahlen in *drei* Einheiten mit nicht kommutativer Multiplikation, die im folgenden als *Ternionen* bezeichnet werden. Diesen Standpunkt entwickelt das erste Kapitel, während das zweite rein geometrischer Natur ist und die Grundtatsachen der neuen Disziplin bringt. Das dritte Kapitel ist den engen Beziehungen gewidmet, die zwischen dieser dreidimensionalen Cremonageometrie und dem projektiven vierdimensionalen Raum bestehen. Im letzten Kapitel werden Querverbindungen hergestellt zum vierdimensionalen euklidischen Raum, sowie zum projektiven und euklidischen dreidimensionalen Raum. Die neue Theorie verhält sich zur konformen Geometrie wie die euklidische zur nichteuklidischen Geometrie. Durch Wechsel des Raumelementes läßt sie sich in die laguerresche Geometrie des Raumes überführen.

Kapitel I. Die elementaren Operationen mit Ternionen.

§ 1. Das Verfahren, den Punkt (x, y) der Gaußschen Ebene durch die komplexe Zahl $x + yi$ darzustellen, läßt bekanntlich eine *unmittelbare* Erweiterung für den dreidimensionalen Raum nicht zu; der Ansatz $x + yi + zj$ führt vielmehr auf ein System komplexer Zahlen in *vier* Einheiten, eine Ausartung eines Systems, welches dem der Hamiltonschen Quaternionen äquivalent ist.

Es ist aber auf eine andere Art möglich, den Punkt (x, y, z) des Raumes durch eine komplexe Zahl

$$xE_0 + yE_1 + zE_2$$

eines Systems in *drei* Einheiten „darzustellen". Dabei kann noch E_0 mit der skalaren Einheit identifiziert werden, *aber dann nicht mehr E_1 mit der imaginären Einheit.*

Das ist sogar auf mehrere Arten möglich, von denen im folgenden die scheinbar interessanteste behandelt werden soll. Wir verstehen unter einer *Ternion* stets eine höhere komplexe Zahl, die die Multiplikationstafel befolgt

$$\begin{array}{ccc} E_0 & E_1 & E_2 \\ E_1 & E_0 & E_2 \\ E_2 & -E_2 & 0, \end{array}$$

sodaß also ein Produkt nach folgender Regel zu bilden ist:

$$(aE_0 + bE_1 + cE_2) \cdot (xE_0 + yE_1 + zE_2) = \\ (ax + by)\,E_0 + (bx + ay)\,E_1 + \{(a + b)\,z + c\,(x - y)\}\,E_2.$$

Die Multiplikation ist also nicht kommutativ, und dieser Umstand mag bisher davon abgehalten haben, die auf diesem Wege sich ergebende Ternionengeometrie näher zu betrachten.

Wir ordnen also jetzt dem (reellen oder imaginären) Punkte (x, y, z) die Ternion $xE_0 + yE_1 + zE_2$ zu, und sehen zu, was sich damit machen läßt.

§ 2. Es ist bekannt, welchen Sinn es hat, wenn man sagt, daß die Multiplikation gewöhnlicher komplexer Zahlen in der Gaußschen Ebene auf gleichsinnige *Dehnungen* hinauskommt. Bei den Ternionen wird man so auf *Affinitäten* geführt. Aus

$$(1) \qquad x'E_0 + y'E_1 + z'E_2 = (aE_0 + bE_1 + cE_2)\,(xE_0 + yE_1 + zE_2)$$

folgt nämlich

$$(2) \qquad \begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= bx + ay \\ z' &= cx - cy + (a + b)\,z. \end{aligned}$$

Das ist aber bei festem (a, b, c) eine Affinität, und das trifft auch noch bei der entgegengesetzten Reihenfolge der Faktoren in (1) zu. *Es ist also im folgenden mit den Begriffen der Affingeometrie des Raumes zu arbeiten;* insbesondere gilt das Koordinatensystem als affin (d. h. von Winkeln und Entfernungen wird kein Gebrauch gemacht).

Richtig ist das aber nur, solange man sich auf die Betrachtung der Addition und Multiplikation der Ternionen beschränkt; bei der Division wird ganz etwas Anderes zum Vorschein kommen als die landläufige Affingeometrie. Vorher haben wir es aber mit elementareren Dingen zu tun.

Die Formeln (2) lassen sich als die einer dreiparametrigen Gruppe von Affinitäten auffassen (allerdings nur im Sinne von S. Lie), und eine weitere solche Gruppe erhält man, wenn man in (1) die Reihenfolge der Faktoren abändert. Die Terminologie dieser beiden Gruppen ist zunächst zu erarbeiten. Nicht alle hier auftretenden Begriffe sind beizubehalten, wenn man später umfassendere Gruppen betrachtet.

§ 3. Eine Richtung im Raum ist vor allen übrigen ausgezeichnet. Transformiert man nämlich vermöge (2) zwei Punkte, deren Verbindungsgerade zur z-Achse parallel ist, so ist auch die Verbindungsgerade der Bildpunkte zur z-Achse parallel. Demgemäß nennen wir die z-Richtung *vertikal.*

Unter den Vertikalen spielt wieder die z-Achse selbst eine Sonderrolle, und soll demgemäß als *Hauptgerade* bezeichnet werden. Multipliziert man nämlich zwei Punkte (das heißt natürlich die zugeordneten Ternionen) miteinander, die auf einer sonstigen Vertikalen liegen, so ist das Produkt *niemals* Null, liegen aber beide Faktorpunkte auf der z-Achse selbst, so ist das Produkt *stets* Null.

Aus (2) folgt

$$x' + y' = (a + b)\,(x + y), \qquad x' - y' = (a - b)\,(x - y).$$

Daher gibt es Vertikalebenen besonderen Verhaltens. Wir nennen die Ebene $x + y = 0$ die *linke Hauptebene*, die Ebene $x - y = 0$ die *rechte Hauptebene.* Letztere läuft durch die Mitte zwischen den beiden Einheitspunkten auf der x-Achse und der y-Achse. Die linke Hauptebene ist zur Verbindungsgeraden der beiden genannten Einheitspunkte

parallel. Beide Hauptebenen laufen durch die Hauptgerade. Eine Ebene parallel zur linken Hauptebene soll eine *Linksebene* heißen, eine Parallelebene zur rechten Hauptebene eine *Rechtsebene.*

Die Sonderstellung dieser Gebilde erhellt aus den folgenden Tatsachen: Bei der Affinität (2) geht eine Linksebene wieder in eine Linksebene über, eine Rechtsebene wieder in eine Rechtsebene; linke und rechte Hauptebene bleiben in Ruhe.

§ 4. Der Punkt (a, b, c) soll so bestimmt werden, daß *identisch*, d. i. für alle (x, y, z), gilt

$$(aE_0 + bE_1 + cE_2)\,(xE_0 + yE_1 + zE_2) \equiv (xE_0 + yE_1 + zE_2)\,(aE_0 + bE_1 + cE_2).$$

Dazu erweist sich als notwendig und hinreichend $b = c = 0$.

Damit spielen die Punkte der x-Achse eine Rolle für sich; sie sollen als *skalar* bezeichnet werden, ebenso die zugehörigen Ternionen. Das Produkt zweier skalarer Punkte ist wieder skalar. Zu den skalaren Punkten gehört der Nullpunkt, sowie der skalare Einheitspunkt von der Ternion E_0, die sich wie die Zahl eins insofern verhält, als sie bei der Multiplikation (in beliebiger Reihenfolge) mit einer andern Ternion stets diese reproduziert.

Die *skalare Achse*, d. i. die Gerade der skalaren Punkte, vermittelt wie jede andere Gerade ∞^2 *involutorische* Affinitäten, bei denen sie punktweise stehen bleibt. Unter diesen Affinspiegelungen ist hier eine herauszuheben, nämlich die, deren Streichrichtung parallel zur yz-Ebene ist. Sind P und $\widetilde{P}$ zwei zugeordnete Punkte, so soll also die Verbindungsgerade $P\widetilde{P}$ parallel zur yz-Ebene sein, während die Mitte zwischen P und $\widetilde{P}$ auf der skalaren Achse liegt. Ist P aber skalar, so ist fällt P mit $\widetilde{P}$ zusammen.

Ist P der Punkt (x, y, z), so hat $\widetilde{P}$ die Koordinaten $(x, -y, -z)$, und beide Produkte der zugehörigen Ternionen sind skalar:

$$\begin{aligned}(xE_0 + yE_1 + zE_2)\,(xE_0 - yE_1 - zE_2) &= (xE_0 - yE_1 - zE_2)\,(xE_0 + yE_1 + zE_2)\\ &= (x^2 - y^2)\,E_0.\end{aligned}$$

Diese involutorische Zuordnung entspricht dem Konjugium bei den gewöhnlichen komplexen Zahlen und soll daher ebenso bezeichnet werden. Von den beiden Punkten (x, y, z) und $(x, -y, -z)$ heißt also jeder zum andern *konjugiert.* Der Ausdruck $x^2 - y^2$ ist demnach sinngemäß als *Norm* von (x, y, z) und von $(x, -y, -z)$ zu bezeichnen. Liegt P in der linken Hauptebene, so gehört $\tilde{P}$ der rechten Hauptebene an, und umgekehrt. Liegt P auf der Hauptgeraden, so auch $\tilde{P}$.

Es ist noch die Sonderstellung der yz-Ebene aufzuklären. Das Quadrat einer Ternion, die zu einem Punkte der yz-Ebene gehört, ist skalar. Ist umgekehrt eine Ternion nicht selbst skalar, wohl aber ihr Quadrat, so liegt der zugehörige Punkt in der yz-Ebene.

§ 5. Aus den Formeln (1) oder (2) folgt

$$x'^2 - y'^2 = (a^2 - b^2)\,(x^2 - y^2).$$

Die Norm eines Produktes ist gleich dem Produkt der Normen der Faktoren.

Danach wird man eine Ternion *regulär* oder *singulär* zu nennen haben, je nachdem die Norm von Null verschieden ist oder verschwindet. Die zu den singulären Ternionen gehörigen Punkte erfüllen die beiden Hauptebenen. Jedes Produkt zweier regulären Ternionen ist regulär. Ist in einem Produkt ein Faktor singulär, so ist auch das Produkt singulär. Ist von zwei konjugierten Ternionen die eine regulär [singulär], so ist es auch die andere.

Die Null ist singulär. Soll also ein Produkt Null werden, so ist dazu notwendig, daß wenigstens ein Faktor singulär ist. Das ist nicht hinreichend. Wir zählen die einzigen Möglichkeiten, für die ein Produkt Null werden kann, auf:

Ein Faktor regulär	der andere Faktor Null
Ein Faktor Null	der andere Faktor beliebig
Erster Faktor ($\neq 0$) in linker Hauptebene	zweiter Faktor beliebig in rechter Hauptebene
Erster Faktor A *nur* in rechter Hauptebene	zweiter Faktor auf der Geraden $O\widetilde{A}$
Zweiter Faktor ($\neq 0$) in rechter Hauptebene	erster Faktor beliebig in linker Hauptebene
Zweiter Faktor B *nur* in linker Hauptebene.	erster Faktor auf der Geraden $O\widetilde{B}$.

§ 6. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die geometrische Deutung der Rechenoperationen mit Ternionen. Trivial ist die Addition.

Als *Summe* der beiden Punkte $X(x, y, z)$ und $P(a, b, c)$ wird erklärt der Punkt $X'(x + a, y + b, z + c)$. Dafür soll kurz geschrieben werden

$$X' = X + P,$$

wobei diese Buchstaben X, P, X' die zu den gleichnamigen Punkten gehörigen Ternionen bedeuten sollen. Bedeutet so O den Nullpunkt bzw. die Ternion Null, so wird der Zusammenhang zwischen X, X', P durch die sogenannte Parallelogrammkonstruktion beschrieben, die korrekt so lautet:

X' ist das Wendebild von O um die Mitte von X und P.

Daraus ziehen wir einige Folgerungen, die wir für die Multiplikation benötigen werden.

Jeder Punkt P läßt sich darstellen als Summe von einem Punkte P_l der linken Hauptebene und einem Punkte P_r der rechten Hauptebene. Diese Darstellung wird eindeutig, wenn man noch die Forderung hinzufügt, daß P_l und P_r derselben Horizontalebene angehören sollen. Damit ist natürlich eine Parallelebene zur xy-Ebene gemeint. Dann hat man für P_l und P_r die Koordinaten

$$P_l\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{c}{2}\right), \qquad P_r\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

und kann schreiben $P = P_l + P_r$.

Ist P gegeben, so lassen sich diese beiden Punkte so konstruieren: Die Linksebene [Rechtsebene] durch P schneidet die rechte [linke] Hauptebene längs einer Vertikalen $G_r[G_l]$. Die horizontale Mittelebene von O und P trifft G_l in P_l, G_r in P_r.

Weiter bemerken wir für später, daß die Punkte

$$P_l + \widetilde{P}_l \text{ mit den Koordinaten } (a-b, 0, 0)$$
$$P_r + \widetilde{P}_r \text{ mit den Koordinaten } (a+b, 0, 0)$$

die skalaren Punkte der beiden folgenden Ebenen sind:

der Rechtsebene durch den Punkt P_l,
der Linksebene durch den Punkt P_r.

§ 7. Wenn wir uns jetzt zur *Multiplikation* wenden, so brauchen wir den skalaren Einheitspunkt. Er hat die Ternion E_0 und soll kurz als E bezeichnet werden.

Zur Abwechslung wollen wir dann den *zweiten* Faktor konstant wählen, also die Beziehung betrachten

$$X' = X \cdot P.$$

Dabei soll zunächst P singulär gewählt werden:

$$N(P) = a^2 - b^2 = 0.$$

Erster Fall: P liege in der *rechten* Hauptebene. In dieser liegt dann auch der Produktpunkt X'. Hier darf man, ohne daß der Produktpunkt sich ändert, den Punkt X in seiner Linksebene spielen lassen. Es genügt daher, den skalaren Punkt $S(x + y, 0, 0)$ dieser Linksebene zu betrachten:

Die Parallele durch S zu PE trifft OP in X'.

Zweiter Fall: P liege nur in der *linken* Hauptebene. In dieser liegt auch X'. Statt des Punktes X darf man einen beliebigen Punkt auf der Parallelen durch X zu $O\widetilde{P}$ nehmen, ohne daß der Punkt X' sich ändert. Von diesen Punkten liegt einer in der linken Hauptebene; er heiße Q.

Das Streckungsbild des Punktes Q von O aus im Maßstab $P + \widetilde{P}$ ist der gesuchte Produktpunkt X'.

Gemeint ist natürlich die Streckung von O aus, die den Punkt E in den Punkt $P + \widetilde{P}$ überführt.

§ 8. Um die Multiplikation $X' = X \cdot P$ jetzt allgemein zu erledigen, d. i. auch in den Fällen $N(P) \neq 0$, beachten wir die Relation

$$\begin{aligned} X' = (X_l + X_r)(P_l + P_r) &= X_l P_l + X_r P_r + X_r P_l + X_l P_r \\ &= X_l P_l + X_r P_r + X_r P_l. \end{aligned}$$

Die drei Summanden rechts lassen sich sämtlich nach § 7 konstruieren. Der Punkt $X_r P_l$ liegt auf der Hauptgeraden in der Horizontalebene des Punktes $X_l P_l + X_r P_r$. Das gibt dann (etwa) folgende Konstruktion des Produktpunktes:

Man unterwirft den Punkt $2X_l$ der Streckung von O aus im Maßstabe $2(P_l + \widetilde{P}_l)$ und den Punkt $2P_r$ der Streckung von O aus im Maßstab $2(X_r + \widetilde{X}_r)$. Die Mitte der so gewonnenen beiden Streckungsbilder heiße M. Dann ist X' die Mitte zwischen M und der Hauptgeraden, in der Horizontalebene von M.

Diese Konstruktion umfaßt die beiden von § 7, wenn man keinen Anstand nimmt, auch von Streckungen vom Maßstab Null zu reden. Unter dem Punkte $2P$ ist natürlich der Summenpunkt $P + P$ zu verstehen. Er ist das Wendebild von O um P.

Eine entsprechende Konstruktion auch bei konstantem *ersten* Faktor zu geben, erübrigt sich auf Grund folgender Bemerkung: Sind P und $\widetilde{P}$ zueinander konjugierte Ternionen, so gilt

$$(\widetilde{PQ}) = \widetilde{Q} \cdot \widetilde{P}.$$

Will man also $X' = P \cdot X$ konstruieren, so nimmt man statt dessen zunächst $\widetilde{X}' = \widetilde{X} \cdot \widetilde{P}$ und wendet dann das Konjugium an.

Die vorgeführte Konstruktion wird nicht sogleich die Billigung des Geometers finden, der die hier auftretenden Affinitäten losgelöst vom Koordinatensystem betrachtet zu sehen wünschen wird. Diese Affinitäten gehören aber ganz verschiedenen Transformationstypen an, und daher ist es auf die gewünschte Art gar nicht möglich, mit einem Wortlaut alle möglichen Fälle zu umspannen.

Ein Ausweg wäre der folgende: Man verschafft sich zunächst vermöge einer Affinspiegelung den Punkt von der Ternion $E_1 \cdot P$ und nennt ihn Q. Dann wird der schon nicht ganz so einfach zu beschreibende Punkt R von der Ternion $E_2 \cdot P$ erarbeitet. Dann ist $X' = X \cdot P$ das Bild von X in der Affinität, die die Punkte $O, E_0 = E, E_1, E_2$ der Reihe nach in die Punkte O, P, Q, R überführt.

§ 9. Sei wieder X die zum Punkte (x, y, z) gehörige Ternion. Die Gleichung

$$N(X) = x^2 - y^2 = k \qquad (k = \text{const.})$$

liefert einen hyperbolischen Vertikalzylinder, der in das Paar der beiden Hauptebenen ausarten kann. Andernfalls sind die Hauptebenen seine Asymptotenebenen.

Damit liegt noch kein Begriff der Ternionengeometrie vor. Von einem solchen müßte doch an dieser Stelle Invarianz gegenüber Addition und Multiplikation verlangt werden. Bei der Schiebung $X' = X + P$ geht aber $x^2 - y^2 - k = 0$ über in die Figur

$$x^2 - y^2 - 2ax + 2by + a^2 - b^2 - k = 0\,.$$

Die Menge dieser Figuren darf zu einem Begriff zusammengefaßt werden, und in dem Sinne soll von jetzt ab das Wort Vertikalzylinder gebraucht werden. Denn auch bei einer Multiplikation geht ein Vertikalzylinder dieser Definition wieder in einen Vertikalzylinder über. Deren gibt es dann ∞^3; von den übrigen ∞^5 Flächen, die man sonst als Vertikalzylinder zu bezeichnen das Recht hätte, unterscheiden sie sich dadurch, daß ihre Asymptotenebenen eine Linksebene und eine Rechtsebene sind.

Wir benötigen für die Zwecke der Division der Ternionen zwei spezielle Arten von Vertikalzylindern:

1) Der Vertikalzylinder durch den Punkt (ξ, η, ζ) und die beiden skalaren Einheitspunkte hat die Gleichung

$$2\eta(x^2 - y^2 - 1) - (\xi^2 - \eta^2 - 1)\,2y = 0\,;$$

er wird unbestimmt nur, wenn die Vertikale durch (ξ, η, ζ) einen der beiden skalaren Einheitspunkte enthält.

2) Der Vertikalzylinder durch den Punkt (ξ, η, ζ) und die beiden Einheitspunkte auf der y-Achse hat die Gleichung

$$2\xi(x^2 - y^2 + 1) - (\xi^2 - \eta^2 + 1)\,2x = 0$$

und wird unbestimmt, wenn die Vertikale durch (ξ, η, ζ) einen dieser beiden Einheitspunkte enthält.

Diese beiden Vertikalzylinder wollen wir vorübergehend als die beiden *ausgezeichneten* Vertikalzylinder durch den Punkt (ξ, η, ζ) bezeichnen.

§ 10. Wir wenden uns zur *Division* der Ternionen. Es ist

$$X^{-1} = \widetilde{X} : N(X)\,;$$

nur von regulären Ternionen läßt sich eine reziproke Ternion bilden.

Setzen wir also die Transformation

$$X' = X^{-1}$$

an oder also

$$x' = \frac{x}{x^2 - y^2}, \qquad y' = \frac{-y}{x^2 - y^2}, \qquad z' = \frac{-z}{x^2 - y^2},$$

so ist diese für die Punkte der beiden Hauptebenen nicht definiert. Davon abgesehen geht eine Linksebene in eine Linksebene, eine Rechtsebene in eine Rechtsebene über,

eine Vertikale in eine Vertikale. Ein Vertikalzylinder geht, wenigstens wenn er nicht durch den Nullpunkt läuft, wieder in einen Vertikalzylinder über.

Ruhepunkte sind außer den beiden skalaren Einheitspunkten noch alle Punkte der beiden Vertikalen über den beiden Einheitspunkten auf der y-Achse. Ein ausgezeichneter Zylinder geht daher wieder in einen ausgezeichneten Vertikalzylinder über.

Durchläuft ein Punkt die Gerade OP, die weder in einer Linksebene noch in einer Rechtsebene liegt, so liegen ihre Bildpunkte auf der Geraden $O\widetilde{P}$.

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Durch P legt man die beiden ausgezeichneten Vertikalzylinder. Sie durchdringen sich noch in einer zweiten Vertikalen; aus dieser schneidet die Gerade $O\widetilde{P}$ den Punkt $P' = P^{-1}$ heraus.

In den Fällen, in denen die ausgezeichneten Vertikalzylinder unbestimmt werden, wird die Konstruktion noch einfacher; es bleibt entweder P in Ruhe oder doch wenigstens seine Vertikale; in diesem Falle ist $P' = \widetilde{P}$ (vgl. § 4).

§ 11. Nachdem so für die Addition, die Multiplikation und die Division sich geometrische Konstruktionen ergeben haben, ist wenigstens im Prinzip jede rationale Operation mit Ternionen der geometrischen Veranschaulichung fähig. Sind A, B, C, D vier Ternionen, die als fest angesehen werden sollen, X eine veränderliche Ternion, so sind die Operationen $XA + B$, $XC + D$, $(XC + D)^{-1}$ der Deutung fähig, daher auch

$$X' = (XC + D)^{-1}(XA + B). \tag{3}$$

Diese bilden aber eine Gruppe, die von elf wesentlichen Parametern abhängt.

Sei nämlich

$$A = A_0E_0 + A_1E_1 + A_2E_2, \quad B = B_0E_0 + B_1E_1 + B_2E_2 \qquad \text{usw.}$$

Dann kommt es nur auf die Verhältnisse der zwölf skalaren Größen $A_0, A_1, A_2; B_0, B_1, B_2; C_0, C_1, C_2; D_0, D_1, D_2$ an. Diese zwölf Größen sollen die *Parameter* der Transformation heißen. Führt man nach der Transformation mit den Parametern A, B, C, D die mit den Parametern A', B', C', D' aus, so ergeben sich für die Parameter der resultierenden Transformation die Ternionengleichungen

$$\begin{aligned} A'' &= AA' + CB', \qquad B'' = BA' + DB' \\ C'' &= AC' + CD', \qquad D'' = BC' + DD'. \end{aligned} \tag{4}$$

Rechnet man die Ternionenformeln der Transformation aus, so erhält man (mit $X = xE_0 + yE_1 + zE_2$)

$$x' + y' = \frac{(A_0 + A_1)(x + y) + (B_0 + B_1)}{(C_0 + C_1)(x + y) + (D_0 + D_1)}, \qquad x' - y' = \frac{(A_0 - A_1)(x - y) + (B_0 - B_1)}{(C_0 - C_1)(x - y) + (D_0 - D_1)}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \{(C_0 + C_1)(x + y) + (D_0 + D_1)\}\{(C_0 - C_1)(x - y) + (D_0 - D_1)\}z' \\ = \{(A_0 - A_1)(D_0 - D_1) - (B_0 - B_1)(C_0 - C_1)\}z \\ + \{A_2(x + y) + B_2\}\{(C_0 - C_1)(x - y) + (D_0 - D_1)\} \\ - \{C_2(x + y) + D_2\}\{(A_0 - A_1)(x - y) + (B_0 - B_1)\}. \end{aligned}$$

Die Parameter sind also nicht beliebig zu wählen, sondern gemäß den beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (A_0 + A_1)(D_0 + D_1) - (B_0 + B_1)(C_0 + C_1) \neq 0, \\ \Delta_2 &= (A_0 - A_1)(D_0 - D_1) - (B_0 - B_1)(C_0 - C_1) \neq 0, \end{aligned}$$

die sich in

$$\Delta_1\Delta_2 = N(AD - BC) \neq 0 \tag{6}$$

zusammenziehen lassen.

Auf die erste der Formeln (5) wird man ungezwungen geführt, wenn man in (3) beide Seiten *rechts* mit dem Faktor E_2 multipliziert und beachtet, daß für jede Ternion die Beziehung gilt

$$XE_2 = (X_0 + X_1)\, E_2.$$

Bei Verwendung des Linksfaktors E_2 erhält man ebenso die zweite Formel (5), unter Beachtung von

$$E_2 X = (X_0 - X_1)\, E_2.$$

In den Formeln (5) tritt eine gewisse Unsymmetrie der dritten Formel zutage. Das hat seinen tieferen Grund. Man hat bei festen Parametern wohl zu unterscheiden zwischen den Transformationen

$$X' = (XC + D)^{-1}(XA + B), \qquad X' = (XA + B)(XC + D)^{-1},$$
$$X' = (CX + D)^{-1}(AX + B), \qquad X' = (AX + B)(CX + D)^{-1};$$

Läßt man aber die Parameter alle möglichen mit (6) *verträglichen Wertsysteme durchlaufen, so erhält man in allen vier Fällen dieselbe Gruppe.*

Man hat also für dieselbe Gruppe nicht weniger als vier verschiedene Ternionendarstellungen und müßte eigentlich alle vier gleichzeitig verwenden.

Läßt sich so mit den Formeln (3) noch einfach zeigen, daß die Identität durch

$$A_0 = D_0 \neq 0, \quad A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = B_0 = B_1 = B_2 = C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

geliefert wird, so kann bereits der Nachweis, daß die zu (3) inverse Transformation die Parameter

$$\begin{aligned} A^* &= \quad \tilde{A}D\tilde{D} - \tilde{B}D\tilde{C}, & B^* &= -\tilde{D}B\tilde{A} + \tilde{C}B\tilde{B} \\ C^* &= -\tilde{A}C\tilde{D} + \tilde{B}C\tilde{C}, & D^* &= \quad \tilde{D}A\tilde{A} - \tilde{C}A\tilde{B} \end{aligned} \tag{7}$$

hat, nur recht umständlich erbracht werden, und verlangt die Anwendung der Ternionenidentität

$$R(P\tilde{Q} - \tilde{Q}P) = (\tilde{P}Q - Q\tilde{P})\,\tilde{R}.$$

Man wird also im konkreten Falle besser mit den Formeln (5) arbeiten.

Die Gruppe (3) soll als G_{11} bezeichnet werden. Wir erweitern sie noch durch Hinzufügung des Konjugiums, und erhalten in

$$X' = (\tilde{X}C + D)^{-1}(\tilde{X}A + B), \quad N(AD - BC) \neq 0 \tag{8}$$

eine Schar von Transformationen, die als H_{11} bezeichnet werden soll.

§ 12. Die gemischte Gruppe (G_{11}, H_{11}) begründet die Ternionengeometrie.

Um die Transformationen dieser Gruppe kurz charakterisieren zu können, ist man genötigt, den in § 9 gebrachten Begriff des Vertikalzylinders noch etwas zu erweitern:

Jedes Gebilde

$$(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)(x^2 - y^2) + (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)(x + y) + (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)(x - y) + \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4 = 0 \tag{9}$$

soll als Vertikalzylinder bezeichnet werden. Neu ist, daß jetzt der Koeffizient $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4$ auch Null werden darf. Der Vertikalzylinder ist reduzibel oder irreduzibel, je nachdem der Ausdruck

(10) $$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 - \mathfrak{A}_4^2$$

verschwindet oder von Null verschieden ist. Dann kann man aussprechen:

Die Gruppe (G_{11}, H_{11}) *enthält alle analytischen Punkttransformationen, bei denen ein irreduzibler* [*reduzibler*] *Vertikalzylinder wieder in einen irreduziblen* [*reduziblen*] *Vertikalzylinder übergeht.*

Es handelt sich hier um eine Gruppe von birationalen oder sogenannten Cremonaschen Transformationen. Von solchen ist — von dem trivialen Falle der projektiven Gruppe abgesehen — genauer bisher nur die konforme Gruppe untersucht worden. Insofern darf die jetzt zu entwickelnde Geometrie der Gruppe (G_{11}, H_{11}) als ein Gegenstück zur konformen Geometrie bezeichnet werden, wenn auch hier, wie man sehen wird, viel verwickeltere Verhältnisse vorliegen.

Kapitel II. Die Ternionengeometrie.

§ 13. Die Bevorzugung der z-Richtung in § 3 als *vertikaler* Richtung kommt darauf hinaus, daß man nicht in der Gruppe aller Affinitäten arbeitet, sondern in der zehnparametrigen Untergruppe

$$\begin{aligned} x' &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y \quad * \\ y' &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y \quad * \qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,a_{33} \neq 0\,. \\ z' &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist den *Linksebenen* $(x + y = \lambda)$ und den *Rechtsebenen* $(x - y = \varrho)$ eine Sonderstellung zugewiesen. Das bedeutet, daß man in der Untergruppe (G_8, H_8) von Affinitäten arbeiten will, die aus der obigen zehngliedrigen Gruppe durch die Forderungen

$$G_8\colon \quad a_{21} - a_{12} = 0, \quad a_{22} - a_{11} = 0 \qquad\qquad H_8\colon \quad a_{21} + a_{12} = 0, \quad a_{22} + a_{11} = 0$$

abgeschieden wird. Jede Transformation von H_8 verwandelt eine Linksebene in eine Rechtsebene und umgekehrt. Jede Transformation von G_8 führt eine Linksebene [Rechtsebene] wieder in eine Linksebene [Rechtsebene] über.

Aus $G_{11}[H_{11}]$ entsteht $G_8[H_8]$, wenn man in (3) [(8)] setzt:

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0.$$

Die Gleichung

(9) $$(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)(x^2 - y^2) + 2\mathfrak{A}_1 x + 2\mathfrak{A}_2 y + (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4) = 0$$

des Vertikalzylinders läßt sich für $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 \neq 0$ so schreiben:

$$\left(x + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4}\right)^2 - \left(y - \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4}\right)^2 + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{A})}{(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)^2} = 0.$$

Ist er irreduzibel, so sind seine Asymptotenebenen

$$x + y + \frac{\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4} = 0, \qquad x - y + \frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4} = 0.$$

Ist er reduzibel, so besteht er aus der Linksebene

$$x + y = \frac{-(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4} = \frac{-(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4)}{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2}$$

und der Rechtsebene

$$x - y = \frac{-(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4} = \frac{-(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4)}{\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2}.$$

§ 14. Der entscheidende Schritt, der über den Gedankenkreis der affinen Geometrie hinaus führt, besteht jetzt im Beschluß, bei der Gleichung (9) von einem Vertikalzylinder auch dann noch zu reden, wenn $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$ ist. Damit gilt der Satz:

Durch drei getrennte Vertikalgerade, die nicht derselben Linksebene [*derselben Rechtsebene*] *angehören, läuft ein einziger Vertikalzylinder.*

Darin liegt ein genaues Analogon zu dem Satze der konformen Geometrie der komplexen Ebene: Durch drei Punkte, die nicht derselben Isotropen angehören, läuft ein einziger Kreis.

Nun ist aber die Subsumption von Vertikalzylindern im eigentlichen Sinne mit gewissen Ebenen zu einem Begriff in der Affingeometrie schlechthin unzulässig. *Zulässig kann es nur sein in der Geometrie einer Obergruppe, die nicht ausschließlich aus Affinitäten besteht.* Wie man zu einer solchen Obergruppe gelangen kann, ergibt sich, wenn man die beiden ersten Formeln von G_8 so schreibt:

$$(11a)\quad x' + y' = (a_{11} + a_{12})(x + y) + a_{10} + a_{20}, \quad x' - y' = (a_{11} - a_{12})(x - y) + a_{10} - a_{20}.$$

Hier transformieren sich $x + y$ und $x - y$ linear und ganz. Man kann daher eine linear gebrochene Abhängigkeit fordern, *ohne daß die Transformation aufhört, eine Linksebene* (im allgemeinen!) *wieder in eine Linksebene, eine Rechtsebene* (im allgemeinen!) *wieder in eine Rechtsebene überzuführen.* Und dann geht wirklich ein Vertikalzylinder wieder in einen Vertikalzylinder über, und insbesonderes kann der Vertikalzylinder $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 \neq 0$ in einen Vertikalzylinder $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}'_0 - \mathfrak{A}'_4 = 0$ übergehen.

Auf diesem Wege wird man von neuem zu den beiden ersten Formeln (5) von § 11 geführt. Noch nicht zur dritten, denn vorderhand arbeiten wir ja gar nicht mit Raumpunkten (x, y, z), sondern unsere Raumelemente sind, solange wir lediglich mit Vertikalzylindern, Linksebenen und Rechtsebenen zu tun haben, die Vertikalgeraden (x, y). Vorläufig liegt also eine sechsgliedrige Gruppe von Transformationen *von Vertikalgeraden* vor, die später zu der G_{11} von Punkttransformationen erweitert wird.

Aus den ersten beiden Formeln von H_8

$$(11b)\quad x' + y' = (a_{11} - a_{12})(x - y) + a_{10} + a_{20}, \quad x' - y' = (a_{11} + a_{12})(x + y) + a_{10} - a_{20}$$

entsteht auf demselben Wege eine Schar von ∞^6 Vertikalgeradentransformationen. So ist eine gemischte sechsgliedrige Gruppe von Transformationen von Vertikalgeraden gewonnen, und in den Gedankenkreis dieser Gruppe gehört die Konstruktion des irreduziblen Vertikalzylinders vermöge einer „projektiven" Zuordnung der beiden Büschel der Rechtsebenen und der Linksebenen. Sie bedeutet die Transformation

$$(12)\quad x' + y' = \frac{-(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)(x - y) - (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4)}{(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)(x - y) + (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)}, \quad x' - y' = \frac{-(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)(x + y) - (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4)}{(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)(x + y) + (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)},$$

$$\mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 - \mathfrak{A}_4^2 \neq 0.$$

Die Ruhefigur dieser Transformation ist die Fläche (9), *und zwar auch noch für* $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$, wo eine Vertikalebene üblicher Bezeichnung vorliegt.

§ 15. Die Tatsache, daß sich bei unserer sechsgliedrigen gemischten Gruppe sowohl $x + y$ als auch $x - y$ linear gebrochen transformieren, verlangt jetzt, *jedes der beiden Parallelebenenbüschel zu einem binären Gebiet zu ergänzen.* Man hat dazu die Schar

$x + y = \lambda = \lambda_2 : \lambda_1$ durch eine *akzessorische Linksebene* $(\lambda_1 \to 0)$

$x - y = \varrho = \varrho_2 : \varrho_1$ durch eine *akzessorische Rechtsebene* $(\varrho_1 \to 0)$

abzuschließen. Darauf bezog sich der zweimalige Zusatz „im allgemeinen" in § 14; erst jetzt geht bei einer Transformation der sechsgliedrigen Gruppe eine Linksebene *aus-*

nahmslos in eine Linksebene über und dann auch eine Rechtsebene ausnahmslos in eine Rechtsebene *oder*: eine Linksebene [Rechtsebene] wird ausnahmslos in eine Rechtsebene [Linksebene] verwandelt.

Natürlich verpflichtet die Einführung dieser uneigentlichen Elemente zu einem ganz andern analytischen Apparat, der aber vorderhand zurückgestellt werden soll.

Die beiden akzessorischen Ebenen hat man mit je ∞^2 akzessorischen Punkten zu belegen und auch mit je ∞^1 akzessorischen Vertikalgeraden. Es muß ja verlangt werden, daß *ausnahmslos* der Satz gilt:

Jede Linksebene trifft jede Rechtsebene in einer Vertikalen.

Insbesondere muß die akzessorische Linksebene auch die akzessorische Rechtsebene in einer Vertikalen schneiden; wir werden diese (obwohl sie streng genommen keine Sonderrolle spielt), als *ausgezeichnete Vertikale* bezeichnen. Die Vertikalen des Vertikalzylinders sind (für $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 \neq 0$) in der akzessorischen Linksebene durch

$$x + y + \frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4} = 0,$$

in der akzessorischen Rechtsebene durch

$$x - y + \frac{\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4} = 0$$

bestimmt. Für $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \neq 0$ folgt das aus (12); diese beiden akzessorischen Vertikalen liegen also in den Asymptotenebenen. Für $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = 0$ folgt die Behauptung aus den Formeln (11a) und (11b).

Für $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$ folgt: Die Vertikalzylinder, die üblicherweise als Vertikalebenen bezeichnet werden, sind die durch die ausgezeichnete Vertikale. Die reduziblen unter ihnen sind Ebenenpaare, deren eine Ebene akzessorisch ist.

Es ist zu beachten, daß alle ∞^3 Vertikalzylinder projektiv durch *dieselben* beiden uneigentlichen geraden Linien abzuschließen sind, jetzt aber nicht immer durch dieselben akzessorischen Vertikalen. Nur dann haben zwei Vertikalzylinder dieselben akzessorischen Vertikalen, wenn sie dieselben Asymptotenebenen haben. Es ist das ein Sonderfall des allgemeineren Satzes: Zwei getrennte *irreduzible* Vertikalzylinder haben zwei Schnittvertikalen, die zusammenfallen können. (Zwei reduzible Vertikalzylinder können auch ∞^1 Vertikalen gemeinsam haben.)

§ 16. Ein irreduzibler Vertikalzylinder $\mathfrak{A}$ bestimmt eine involutorische Vertikalentransformation, die durch (12) geliefert wird. Diese läßt sich jetzt konstruieren:

Die Linksebene durch die Vertikale (x, y) *trifft den Vertikalzylinder in einer Vertikalen* (ξ_l, η_l), *die Rechtsebene durch* (x, y) *in einer Vertikalen* (ξ_r, η_r). *Die Rechtsebene durch* (ξ_l, η_l) *schneidet die Linksebene durch* (ξ_r, η_r) *in der gesuchten Bildvertikalen* (x', y') *der Ausgangsvertikalen* (x, y). Jede Vertikale des Vertikalzylinders bleibt dabei in Ruhe, so daß man die Transformation als *Spiegelung* am Vertikalzylinder bezeichnen kann.

Das Bild der ausgezeichneten Vertikalen ist die Mittelgerade des spiegelnden Vertikalzylinders (die Schnittgerade der beiden Asymptotenebenen). Im Sonderfall $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$ bleibt sie dagegen in Ruhe, und die Transformation ist eine *Affinspiegelung*.

Die Spiegelung am irreduziblen Vertikalzylinder $\mathfrak{A}$ führt den Vertikalzylinder $\mathfrak{B}$ wieder in einen Vertikalzylinder $\mathfrak{B}'$ über, wo

$$\mathfrak{B}' = 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\mathfrak{A})\,\mathfrak{B}\,. \tag{13}$$

Dabei hat das Symbol $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ die Bedeutung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4, \tag{14}$$

entsteht also aus $(\mathfrak{A}\mathfrak{A})$ durch Polarisation. Die Indizes sind hier 0, 1, 2, 4. Für zwei Vertikalzylinder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ folgt daraus

$$(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}') = (\mathfrak{A}\mathfrak{A})^2\,(\mathfrak{B}\mathfrak{C}). \tag{15}$$

In $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ hat man also eine relative Invariante gegenüber Spiegelungen vor sich.

§ 17. Zwei Vertikalzylinder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sollen *zueinander normal* heißen, wenn der Ausdruck $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ verschwindet.

Bei der Spiegelung an einem Vertikalzylinder bleibt daher jeder zu ihm normale Vertikalzylinder als Ganzes in Ruhe.

Es erhebt sich jetzt die Aufgabe, für die als Normalität bezeichnete Beziehung zweier Vertikalzylinder geometrische Deutungen zu suchen.

Zwei reduzible Vertikalzylinder sind zueinander normal, wenn sie entweder die Linksebene oder die Rechtsebene gemeinsam haben.

Ein reduzibler und ein irreduzibler Vertikalzylinder sind zueinander normal, wenn sie sich berühren, d. i. eine einzige Vertikale gemeinsam haben.

Zwei irreduzible Vertikalzylinder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind zueinander normal, wenn die beiden Spiegelungen an ihnen vertauschbar sind. Bezeichnen wir diese beiden als $\{\mathfrak{B}\}$ und $\{\mathfrak{C}\}$, so ist

$$\{\mathfrak{B}\}\{\mathfrak{C}\} = \{\mathfrak{C}\}\{\mathfrak{B}\}$$

eine *involutorische* Transformation, die, gehörig ergänzt, zu G_{11} gehört (während $\{\mathfrak{B}\}$ und $\{\mathfrak{C}\}$ selbst dann zu H_{11} gehören). Man kann auch sagen, daß zwei irreduzible Vertikalzylinder zueinander normal sind, wenn jeder bei der Spiegelung am andern als Ganzes in Ruhe bleibt.

Ist insbesondere $\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_4 = 0$, $\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4 = 0$, so werden die beiden Vertikalebenen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ harmonisch durch eine Linksebene und eine Rechtsebene getrennt.

Für $\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_4 \neq 0$, $\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4 = 0$ liegt normale Lage vor, wenn die Vertikalebene Durchmesser des Zylinders ist.

Um auch für den letzten Fall eine weitere Deutung zu geben, führen wir noch einen neuen Begriff ein:

Das Vertikalenpaar

$$(x + y = l,\ x - y = r), \qquad (x + y = L,\ x - y = R)$$

heiße zum Vertikalenpaar

$$(x + y = l,\ x - y = R), \qquad (x + y = L,\ x - y = r)$$

reziprok.

So sind die in der Konstruktion der Spiegelung in § 16 benutzten Vertikalenpaare zueinander reziprok, das Paar (x, y), (x', y') reziprok zum Paare (ξ_l, η_l), (ξ_r, η_r). Jeder Vertikalzylinder durch ein Vertikalenpaar ist normal zu allen Zylindern durch das reziproke Paar; daraus folgt, daß diese beiden Zylinderscharen als zueinander reziproke Büschel aufgefaßt werden können, in Analogie zu den wohlbekannten reziproken Kreisbüscheln.

Jetzt können wir aussprechen:

Für $\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_4 \neq 0$, $\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4 \neq 0$ liegt normale Lage vor, wenn die beiden Zylinder zueinander konjugiert sind. Andernfalls besitzen sie eine gemeinsame Durchmesserebene. Das Paar ihrer (stets getrennten) Schnittvertikalen hat sein reziprokes Paar in der gemeinsamen Durchmesserebene.

Alle zu einem vorgegebenen Vertikalzylinder normalen Zylinder bilden ein ternäres Gebiet. Um sie aber erschöpfend anzugeben, braucht man mehrere Formelsysteme! Vermeiden kann man das bei Einführung überzähliger Parameter. Dann hat man für jeden zu $\mathfrak{A}$ normalen Zylinder $\mathfrak{Z}$ die Darstellung

$$(16)\quad \begin{aligned}\mathfrak{Z}_0:\mathfrak{Z}_1:\mathfrak{Z}_2:\mathfrak{Z}_4 = {} & \mathfrak{A}_1\sigma_{24} + \mathfrak{A}_2\sigma_{41} + \mathfrak{A}_4\sigma_{12} : \mathfrak{A}_0\sigma_{24} + \mathfrak{A}_2\sigma_{40} + \mathfrak{A}_4\sigma_{02} \\ & : \mathfrak{A}_0\sigma_{14} + \mathfrak{A}_1\sigma_{40} + \mathfrak{A}_4\sigma_{01} : \mathfrak{A}_0\sigma_{12} + \mathfrak{A}_1\sigma_{20} + \mathfrak{A}_2\sigma_{01},\end{aligned}$$

wobei die Parameter an die Bedingung gebunden sind

$$\sigma_{01}\sigma_{24} + \sigma_{02}\sigma_{41} + \sigma_{04}\sigma_{12} = 0 \qquad (\sigma_{ki} = -\sigma_{ik}).$$

Schließlich wollen wir noch andeuten, daß es für zwei Vertikalzylinder auch eine absolute Invariante gibt, wie man aus (15) ohne weiteres erkennt.

§ 18. Bisher war unser Raumelement die Vertikale, d. h. wir haben die z-Koordinate ganz vernachlässigt. Wenn wir jetzt zu *Punkten* übergehen, so handelt es sich darum, eine Darstellung zu finden, die außer den eigentlichen Punkten auch die akzessorischen Punkte umfaßt.

Die Vertikale

$$x + y = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \qquad x - y = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \qquad (\lambda_1\varrho_1 \neq 0)$$

ist durch die vier Größen $\lambda_1, \lambda_2; \varrho_1, \varrho_2$ völlig bestimmt; diese Größen sollen die *Parameter* der Vertikalen heißen. Es kommt nur auf die beiden Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\varrho_1 : \varrho_2$ an, d. h. alle Systeme

$$(\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2;\ \ \beta\varrho_1, \beta\varrho_2), \qquad \alpha\beta \neq 0,$$

ergeben dieselbe Vertikale wie das System $(\lambda_1, \lambda_2; \varrho_1, \varrho_2)$.

Die Parameter der Vertikalen haben den Vorteil, daß man mit ihnen auch die akzessorischen Vertikalen erfaßt, die sich nicht mehr durch die beiden obigen Gleichungen darstellen lassen. Man hat dazu nur die Bedingung $\lambda_1\varrho_1 \neq 0$ fallen zu lassen.

So stellt das System $(0:1;\ \varrho_1:\varrho_2)$ die Vertikale dar, die aus der akzessorischen Linksebene durch die Rechtsebene $x - y = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ ausgeschnitten wird, das System $(\lambda_1 : \lambda_2; 0:1)$ die Vertikale in der akzessorischen Rechtsebene und der Linksebene $x + y = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Die ausgezeichnete Vertikale wird endlich durch das Parametersystem $(0:1;\ 0:1)$ geliefert.

Alle eigentlichen Punkte auf der eigentlichen Vertikalen $(\lambda_1 : \lambda_2;\ \varrho_1 : \varrho_2)$ kann man nun so darstellen:

$$(17)\qquad x = \frac{\lambda_2\varrho_1 + \lambda_1\varrho_2}{2\lambda_1\varrho_1} \qquad y = \frac{\lambda_2\varrho_1 - \lambda_1\varrho_2}{2\lambda_1\varrho_1}, \qquad z = \frac{2v}{2\lambda_1\varrho_1} \qquad (\lambda_1\varrho_1 \neq 0),$$

Durch die Einführung des Nenners $2\lambda_1\varrho_1$ bei z wird erreicht, daß der Punkt (x, y, z) durch alle Systeme

$$(18)\qquad (\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2;\ \ \beta\varrho_1, \beta\varrho_2;\ \ \alpha\beta v), \qquad \alpha\beta \neq 0,$$

dargestellt wird.

Jetzt nennen wir $(\lambda_1, \lambda_2; \varrho_1, \varrho_2; v)$ die Parameter des Punktes. Dann kann man wieder die Beschränkung $\lambda_1\varrho_1 \neq 0$ aufheben. So erhält man in $(0, 1; \varrho_1, \varrho_2; v)$ eine Darstellung aller Punkte der akzessorischen Linksebene. Daß so wirklich eine ternäre

Mannigfaltigkeit erhalten wird, folgt daraus, daß zu dem letztgenannten Parametersystem das nachfolgende äquivalent ist

$$(19) \qquad (0, 1;\ \beta\varrho_1, \beta\varrho_2;\ \beta\nu), \qquad \beta \neq 0.$$

Damit können also $\varrho_1 : \varrho_2 : \nu$ als homogene Punktkoordinaten in dieser Ebene aufgefaßt werden; es ist also auch das Tripel $\varrho_1 = \varrho_2 = 0,\ \nu \neq 0$ zulässig (und notwendig), also das Parametersystem $(0, 1; 0, 0; \nu)$ mit $\nu \neq 0$.

Genau so zeigt man, daß *jede* Linksebene ein ternäres Gebiet ist, wenn man Parametersysteme $(\lambda_1, \lambda_2;\ 0, 0;\ \nu)$ zuläßt.

Das Gleiche gilt von jeder Rechtsebene, wenn man Systeme $(0, 0;\ \varrho_1, \varrho_2;\ \nu)$ zuläßt.

§ 19. Jetzt erheben wir den Anspruch, daß eine Vertikale eine Gerade, d. i. ein binäres Punktgebiet, ist. Dann folgt, daß zwei getrennte Vertikale derselben Linksebene einen einzigen Schnittpunkt haben. Dieser ist akzessorisch und gehört zwei getrennten Rechtsebenen an. Daher liegt er in der akzessorischen Linksebene. Mithin hat man für ihn die beiden Darstellungen

$$(20) \qquad (0, 1;\ \varrho_1, \varrho_2;\ \nu), \quad (0, 1;\ r_1, r_2, \nu^*) \qquad (\varrho_1 r_2 - \varrho_2 r_1 \neq 0),$$

die äquivalent sein müssen. Für $\nu = 0$ liegt keine Äquivalenz vor, ebensowenig für $\nu^* = 0$. Das heißt, es ist nicht möglich, α und β mit $\alpha\beta \neq 0$ so zu wählen, daß beide Darstellungen (vgl. (18)) denselben Punkt darstellen. Damit ist $\nu \neq 0,\ \nu^* \neq 0$.

Jetzt setzen wir $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\nu}$ bzw. $\frac{1}{\nu^*}$. So erhalten wir die beiden neuen Darstellungen für den fraglichen Punkt

$$\left(0, 1;\ \frac{\varrho_1}{\nu}, \frac{\varrho_2}{\nu};\ 1\right), \qquad \left(0, 1;\ \frac{r_1}{\nu^*}, \frac{r_2}{\nu^*};\ 1\right)$$

Diese können zur Übereinstimmung nur dadurch gebracht werden, daß man $\nu \to \infty,\ \nu^* \to \infty$ nimmt, und gehen dann über in $(0, 1; 0, 0; 1)$. Das ist also der (akzessorische) Schnittpunkt der beiden Rechtsebenen $\varrho_1 : \varrho_2$ und $r_1 : r_2$. Da die ϱ und r herausgefallen sind, folgt: *Zwei getrennte Rechtsebenen haben stets den akzessorischen Punkt* $(0, 1; 0, 0; 1)$ *gemeinsam und nur diesen.*

Durch diesen Punkt läuft auch die Linksebene, in der die beiden Vertikalen lagen, deren Schnittpunkt wir suchten. Sofort folgt weiter, daß *alle* Linksebenen durch diesen Punkt laufen. Er soll der *singuläre akzessorische Punkt* heißen, und S genannt werden.

Weiter gilt, daß alle Vertikalen durch den Punkt S laufen, und ebenso alle Vertikalzylinder.

Die Bezeichnung *singulär* für den Punkt S rechtfertigt sich aber auch noch vom Standpunkt der Parameterdarstellung aus. Wiederholt man nämlich die ganze Schlußweise unter Vertauschung der Worte rechts und links, so erhält man für S die Darstellung $(0, 0; 0, 1; 1)$. Aber er ist noch anderer Darstellungen fähig. Nimmt man nämlich in (20) jetzt $\alpha = \frac{1}{\nu}$, $\beta = 1$, so erscheint S in der Darstellung $(0, 0;\ \varrho_1, \varrho_2;\ 1)$, und bei Vertauschung von links und rechts ergibt sich noch die weitere Darstellung $(\lambda_1, \lambda_2; 0, 0; 1)$. Wir sind damit zur Festsetzung gezwungen, die die Aussage (18) ergänzt:

Alle Parametersysteme $(0, 0;\ \varrho_1, \varrho_2;\ \nu)$ *mit* $\nu \neq 0$ *gelten untereinander und mit allen Systemen* $(\lambda_1, \lambda_2;\ 0, 0;\ \nu)$ *mit* $\nu \neq 0$ *äquivalent und liefern den singulären Punkt S.*

Es ist das lediglich eine andere Fassung der Tatsache, daß S auf *allen* Linksebenen und auf *allen* Rechtsebenen liegt.

Damit ist jetzt alles in Ordnung; wir können alle eigentlichen und alle akzessorischen Punkte darstellen, und jetzt erweist sich in der Tat jede Linksebene und Rechtsebene als ternäres Gebiet, jede Vertikale als binäres Gebiet, d. h. die dafür notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend.

§ 20. Wir betrachten jetzt Flächen zweiter Ordnung, deren erzeugende Linien in Linksebenen und in Rechtsebenen liegen. Sie lassen sich so darstellen:

$$(21)\quad (\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4)(x^2-y^2)+(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)(x+y)+(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)(x-y)+(\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_4)+2\mathfrak{A}_3 z=0.$$

Für $\mathfrak{A}_3=0$ liegen also Vertikalzylinder vor. Für $\mathfrak{A}_3\neq 0$, $\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4\neq 0$ hat man es mit Paraboloiden zu tun, während in den Fällen $\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4=0$ Ebenen geliefert werden, die nicht vertikal sind. Wir wollen für $\mathfrak{A}_3\neq 0$ von einer *Hauptfläche* reden.

In Punktparametern [1]) heißt die Gleichung der Hauptfläche (21)

$$(22)\quad (\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4)L_2R_2+(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)L_2R_1+(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)L_1R_2+(\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_4)L_1R_1+2\mathfrak{A}_3N=0.$$

Die Fläche läuft durch den Punkt S dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}_3=0$ ist. Man müßte also die Vertikalzylinder mit zu den Hauptflächen rechnen als Hauptflächen durch S. Wir ziehen es indessen vor, das Wort Hauptflächen auf den Fall $\mathfrak{A}_3\neq 0$ zu beschränken.

Die Schnittfigur der Hauptfläche $\mathfrak{A}$ mit der Linksebene $\lambda_1:\lambda_2$ hat die Gleichung

$$\{(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)\lambda_1+(\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4)\lambda_2\}(x-y)+2\mathfrak{A}_3\lambda_1 z+(\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_4)\lambda_1+(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)\lambda_2=0.$$

Vom affinen Standpunkt wäre sie als Gerade zu bezeichnen; fraglich ist aber, ob das jetzt noch erlaubt ist. In Punktparametern heißt das Gebilde aber

$$\{(\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_4)\lambda_1+(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)\lambda_2\}R_1+\{(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)\lambda_1+(\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4)\lambda_2\}R_2+2\mathfrak{A}_3N=0.$$

Nun wissen wir aus § 18, daß $R_1:R_2:N$ homogene Punktkoordinaten in der Linksebene $\lambda_1:\lambda_2$ sind, und daraus entnehmen wir die Berechtigung, auch im Sinne unserer Geometrie von einer Geraden zu reden. Allgemein ist jede Figur, die man vom affinen Standpunkt als Gerade bezeichnet, auch jetzt noch so zu nennen, wenn sie entweder in einer Linksebene liegt („Linksgerade") oder in einer Rechtsebene („Rechtsgerade"). Die Vertikalen gehören zu beiden Arten.

Daß sonstige gerade Linien im Sinne der Affingeometrie jetzt nicht mehr als gerade Linien zu gelten haben, zeigen wir an einem Beispiel. Sei $x=2y=z$ die vorgelegte Gerade der affinen Auffassung. In Punktparametern wird daraus

$$L_2R_1+L_1R_2=2L_2R_1-2L_1R_2=2N,$$

und diese Gleichung läßt sich auf allgemeinste Art mit Hilfe zweier homogener Parameter v_1 und v_2 befriedigen, indem man setzt

$$L_1=v_2,\quad L_2=3v_1,\quad R_1=v_2,\quad R_2=v_1,\quad N=2v_1v_2,$$

also nicht linear; die Figur ist jetzt als Kegelschnitt anzusehen. —

Die Gerade der Hauptfläche in der akzessorischen Linksebene heißt jetzt

$$(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)R_1+(\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4)R_2+2\mathfrak{A}_3N=0.$$

Entsprechend hat man für die akzessorische Gerade in der Rechtsebene die Gleichung

$$(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)L_1+(\mathfrak{A}_0-\mathfrak{A}_4)L_2+2\mathfrak{A}_3N=0.$$

Während also die Hauptflächen, soweit sie Paraboloide sind, in der Affingeometrie durch dieselben beiden uneigentlichen geraden Linien zu ergänzen sind, ist das hier nicht der

---

[1]) Durch die Benutzung großer Buchstaben ($L_1, L_2; R_1, R_2; N$) für die Punktparameter soll angedeutet werden, daß diese veränderlich sein sollen.

Fall; zwar gibt es auch hier jedesmal zwei akzessorische gerade Linien, aber diese ändern sich im allgemeinen mit der Hauptfläche.

Dadurch wird es erst möglich, die Paraboloide mit den Nichtvertikalebenen zusammenzufassen, was in der affinen Betrachtungsweise nicht zulässig ist. Beide Gebilde sind jetzt Träger von zwei (und nur zwei) Scharen gerader Linien. Zwei Linkserzeugende sind zueinander windschief; der einzige Punkt, der als Schnittpunkt allenfalls in Frage kommen könnte, ist S, aber S liegt nicht auf der Hauptfläche. Ganz dasselbe gilt für die Rechtserzeugenden. *Zwei Linksgerade, die nach üblicher Anschauung parallel sind, haben also auch im akzessorischen Gebiet keinen Schnittpunkt*, es sei denn, daß sie in derselben Linksebene liegen. Dasselbe gilt natürlich auch für zwei Rechtsgerade.

Bei den irreduziblen Vertikalzylindern sind die beiden Scharen von Erzeugenden zusammengefallen, diese also Vertikale geworden. Der reduzible Vertikalzylinder enthält aber ∞^2 Linksgerade und ∞^2 Rechtsgerade.

Die üblicherweise als Nichtvertikalebenen bezeichneten Hauptflächen sind die durch den akzessorischen Punkt

$$(0, 1;\ 0, 1;\ 0).$$

(Das gilt auch für die Vertikalzylinder mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4 = 0$.) Dieser Punkt der keine Sonderrolle spielt, soll, weil er später noch gebraucht wird, als *Stützpunkt* bezeichnet werden.

Die Hauptfläche wird von jeder Linksgeraden [Rechtsgeraden], die nicht Erzeugende ist, in *einem einzigen Punkte* geschnitten. Das gilt auch für Vertikalzylinder! Schneidet man so die Hauptfläche $\mathfrak{A}$ mit allen Vertikalen, so erhält man eine Parameterdarstellung für die Punkte der Hauptfläche: Sie wird von der Vertikalen, $(\lambda_1 : \lambda_2,\ \varrho_1 : \varrho_2)$ im Punkte

$$(23)\quad \begin{cases} L_1 = \lambda_1,\ L_2 = \lambda_2;\ \ R_1 = \varrho_1,\ R_2 = \varrho_2; \\ N = \dfrac{(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_4)\,\lambda_2\varrho_2 + (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\,\lambda_2\varrho_1 + (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)\,\lambda_1\varrho_2 + (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_4)\,\lambda_1\varrho_1}{-2\mathfrak{A}_3} \end{cases}$$

getroffen.

§ 21. Die Schnittfigur zweier Hauptflächen ist ein Kegelschnitt. Da die ∞^4 Hauptflächen jedoch nur ∞^6 Kegelschnitte bestimmen können, während es im Raume nach affiner Auffassung doch ∞^8 solcher Figuren gibt, wollen wir die hier zu betrachtenden Schnittfiguren als *Zylinderschnitte* bezeichnen. Denn jede von ihnen liegt auf einem einzigen Vertikalzylinder. Sind nämlich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die beiden Hauptflächen, die zum Schnitt gebracht werden sollen, so gibt es im Flächenbüschel $\sigma_1\mathfrak{B} + \sigma_2\mathfrak{C}$ genau einen Zylinder $(\sigma_1 : \sigma_2 = \mathfrak{C}_3 : -\mathfrak{B}_3)$. Er erweist sich als irreduzibel oder reduzibel, je nachdem der Ausdruck [2])

$$\mathfrak{B}_3^2(\mathfrak{C}\mathfrak{C}) - 2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + \mathfrak{C}_3^2(\mathfrak{B}\mathfrak{B})$$

von Null verschieden ist oder verschwindet. Es ist also jetzt nur noch eine Hauptfläche mit einem Vertikalzylinder zum Schnitt zu bringen, und je nachdem der Zylinder irreduzibel oder reduzibel ist, ist es auch der Zylinderschnitt. Die so erklärten Zylinderschnitte sollen *regulär* heißen, im Gegensatz zu den Schnittfiguren *zweier* Vertikalzylinder, die, *soweit sie eindimensional sind*, als *singuläre* Zylinderschnitte bezeichnet werden sollen. Ein singulärer Zylinderschnitt ist stets reduzibel und besteht aus zwei getrennten oder zusammenfallenden Vertikalen. Ein regulärer Zylinderschnitt kann reduzibel sein und

[2]) Die Symbole $(\mathfrak{B}\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ sind durch (10) bzw. (14) erklärt, und enthalten den Index 3 nicht.

besteht dann aus einer Linksgeraden und einer Rechtsgeraden, von denen keine vertikal ist, und die sich schneiden. *Jeder reguläre Zylinderschnitt wird von einer Vertikalen in höchstens einem Punkte geschnitten.*

Auf einem irreduziblen Vertikalzylinder liegen ∞^3 Zylinderschnitte. Je zwei von ihnen haben zwei getrennte oder zusammenfallende Punkte gemeinsam. Allgemein haben zwei irreduzible Zylinderschnitte *höchstens* zwei Punkte gemeinsam, da ihre Zylinder nur zwei Vertikale gemeinsam haben können. Daher hat ein irreduzibler Zylinderschnitt zwei getrennte oder zusammenfallende akzessorische Punkte, denn das akzessorische Gebiet bildet einen reduziblen Vertikalzylinder.

Durch drei Punkte, von denen keine zwei derselben Linksebene [*Rechtsebene*] *angehören, läuft ein einziger irreduzibler Zylinderschnitt.*

Von einer Linksebene [Rechtsebene] wird ein irreduzibler Zylinderschnitt in einem einzigen Punkte geschnitten. Die irreduziblen Zylinderschnitte dürfen daher nicht mehr als ebene Kurven angesprochen werden.

Zu den irreduziblen Zylinderschnitten gehören die Figuren, die bei affiner Betrachtung als gerade Linien erscheinen, ohne Linksgerade oder Rechtsgerade zu sein. Sie sind die Zylinderschnitte durch den Stützpunkt (§ 20). Das erklärt, warum sie bereits durch zwei Punkte bestimmt sind.

Die Schnittfigur zweier Vertikalzylinder kann aber noch anders aussehen. Sind nämlich beide Zylinder reduzibel und zueinander normal (§ 17), so schneiden sie sich in einer Linksebene oder einer Rechtsebene.

§ 22. Wir suchen jetzt *Punkt*transformationen, bei denen Hauptflächen wieder in Hauptflächen übergehen. Bis dahin hatten wir es nur mit Transformationen von *Vertikalgeraden* zu tun.

Die allgemeinste (linear gebrochene) Vertikalentransformation von § 14, *bei der Linksebenen und Rechtsebenen vertauscht werden*, haben wir jetzt durch den Ansatz zu erweitern

$$x' + y' = \frac{a_{11}(x-y) + a_{12}}{a_{21}(x-y) + a_{22}}, \quad x' - y' = \frac{b_{11}(x+y) + b_{12}}{b_{21}(x+y) + b_{22}}, \quad z' = \varphi(x, y, z).$$

Da die Hauptfläche $z' = 0$ aus einer Hauptfläche hervorgegangen sein soll, hat $\varphi(x, y, z)$ die Gestalt

$$\varphi(x, y, z) = C\{(\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4)(x^2 - y^2) + 2\mathfrak{C}_1 x + 2\mathfrak{C}_2 y - 2\mathfrak{C}_3 z + \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_4\}, \quad \mathfrak{C}_3 \neq 0,$$

der Faktor C erweist sich dabei als Funktion von x und y. Da auch die Hauptfläche $x' + y' + z' = 0$ aus einer Hauptfläche hervorgegangen sein soll, enthält C den Faktor

$$\frac{1}{a_{21}(x-y) + a_{22}}.$$

Betrachtung von $x' - y' + z' = 0$ ergibt als weiteren Faktor von C

$$\frac{1}{b_{21}(x+y) + b_{22}}.$$

Setzt man jetzt

$$(24) \qquad \begin{aligned} x' + y' &= \frac{a_{11}(x-y) + a_{12}}{a_{21}(x-y) + a_{22}}, \quad x' - y' = \frac{b_{11}(x+y) + b_{12}}{b_{21}(x+y) + b_{22}}, \\ z' &= \frac{(\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4)(x^2 - y^2) + 2\mathfrak{C}_1 x + 2\mathfrak{C}_2 y - 2\mathfrak{C}_3 z + \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_4}{\{a_{21}(x-y) + a_{22}\}\{b_{21}(x+y) + b_{22}\}}, \end{aligned}$$

so führt jede Transformation dieser elfparametrigen Schar wirklich Hauptflächen in Hauptflächen über.

Setzt man jetzt (mit $\varphi\psi \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = \varphi(A_0 + A_1),\ a_{12} = \varphi(B_0 + B_1), && a_{21} = \varphi(C_0 + C_1),\ a_{22} = \varphi(D_0 + D_1),\\
&b_{11} = \psi(A_0 - A_1),\ b_{12} = \psi(B_0 + B_1), && b_{21} = \varphi(C_0 - C_1),\ b_{22} = \varphi(D_0 - D_1),\\
&\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4 = \varphi\psi[A_2(C_0 - C_1) - C_2(A_0 - A_1)],\ && \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = \varphi\psi[B_2(C_0 - C_1) - D_2(A_0 - A^1)],\\
&\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_4 = \varphi\psi[B_2(D_0 - D_1) - D_2(B_0 - B_1)],\ && \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2 = \varphi\psi[A_2(D_0 - D_1) - C_2(B_0 - B_1)],\\
&2\mathfrak{C}_3 = \varphi\psi[(A_0 - A_1)(D_0 - D_1) - (B_0 - B_1)(C_0 - C_1)],
\end{aligned}
\tag{25}
$$

so geht (24) in die Schar H_{11} von (8) über.

Entsprechend läßt sich die allgemeinste (linear gebrochene) Vertikalentransformation, *bei welcher Linksebenen* [*Rechtsebenen*] *in Linksebenen* [*Rechtsebenen*] *übergehen*, zu einer Punkttransformation erweitern. Durch den Ansatz

$$
\begin{aligned}
x' + y' &= \frac{a_{11}(x + y) + a_{12}}{a_{21}(x + y) + a_{22}}, \qquad x' - y' = \frac{b_{11}(x - y) + b_{12}}{b_{21}(x - y) + b_{22}},\\
z' &= \frac{(\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_4)(x^2 - y^2) + 2\mathfrak{C}_1 x - 2\mathfrak{C}_2 y + 2\mathfrak{C}_3 z + \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_4}{\{a_{21}(x + y) + a_{22}\}\{b_{21}(x - y) + b_{22}\}}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

wird man so über die Substitutionen (25) zu den Formeln (3) bzw. (5) zurückgeführt, und hat auf diese Weise auch die Gruppe G_{11} von Neuem erarbeitet.

Um das Verhalten der akzessorischen Punkte gegenüber den Transformationen von (G_{11}, H_{11}) zu übersehen, braucht man die Darstellung dieser Gruppe in Punktparametern. Für G_{11} wird

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1' = (D_0 + D_1)\lambda_1 + (C_0 + C_1)\lambda_2; && \varrho_1' = (D_0 - D_1)\varrho_1 + (C_0 - C_1)\varrho_2;\\
&\lambda_2' = (B_0 + B_1)\lambda_1 + (A_0 + A_1)\lambda_2; && \varrho_2' = (B_0 - B_1)\varrho_1 + (A_0 - A_1)\varrho_2;\\
&\nu' = \{B_2(D_0 - D_1) - D_2(B_0 - B_1)\}\lambda_1\varrho_1 + \{B_2(C_0 - C_1) - D_2(A_0 - A_1)\}\lambda_1\varrho_2\\
&\quad + \{A_2(D_0 - D_1) - C_2(B_0 - B_1)\}\lambda_2\varrho_1 + \{A_2(C_0 - C_1) - C_2(A_0 - A_1)\}\lambda_2\varrho_2\\
&\quad + \{(A_0 - A_1)(D_0 - D_1) - (B_0 - B_1)(C_0 - C_1)\}\nu.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Für die Schar H_{11} hat man

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1' = (D_0 + D_1)\varrho_1 + (C_0 + C_1)\varrho_2; && \varrho_1' = (D_0 - D_1)\lambda_1 + (C_0 - C_1)\lambda_2;\\
&\lambda_2' = (B_0 + B_1)\varrho_1 + (A_0 + A_1)\varrho_2; && \varrho_2' = (B_0 - B_1)\lambda_1 + (A_0 - A_1)\lambda_2;\\
&\nu' = \{B_2(D_0 - D_1) - D_2(B_0 - B_1)\}\lambda_1\varrho_1 + \{A_2(D_0 - D_1) - C_2(B_0 - B_1)\}\lambda_1\varrho_2\\
&\quad + \{B_2(C_0 - C_1) - D_2(A_0 - A_1)\}\lambda_2\varrho_1 + \{A_2(C_0 - C_1) - C_2(A_0 - A_1)\}\lambda_2\varrho_2\\
&\quad - \{(A_0 - A_1)(D_0 - D_1) - (B_0 - B_1)(C_0 - C_1)\}\nu.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Damit ist das Ziel dieses Abschnittes erreicht, die Ternionengeometrie ist in den Gedankenkreis des Erlanger Programms eingeordnet. Jetzt halten wir es für angezeigt, das Punktkontinuum der Ternionengeometrie auf eine Punktmannigfaltigkeit eines *projektiven* Raumes abzubilden.

Kapitel III. Die Ternionengeometrie und der projektive vierdimensionale Raum.

§ 23. Der Punkt (x, y, z) soll jetzt fünf homogene Koordinaten erhalten

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 + x^2 - y^2 : 2x : 2y : 2z : 1 - x^2 + y^2 \tag{27}$$

oder also vermöge (17)

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \lambda_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2 : \lambda_2\varrho_1 + \lambda_1\varrho_2 : \lambda_2\varrho_1 - \lambda_1\varrho_2 : 2\nu : \lambda_1\varrho_1 - \lambda_2\varrho_2. \tag{28}$$

Dieser Festsetzung liegt der Gedanke zugrunde, den Raum der Punkte (x, y, z) oder

$(\lambda_1, \lambda_2; \varrho_1, \varrho_2; \nu)$ — wir wollen ihn als *Cremonaraum* bezeichnen — auf die quadratische Mannigfaltigkeit M_3^2

$$(29) \qquad (XX) = X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_4^2 = 0$$

eines R_4 zu beziehen. Diese hat den Rang vier und besitzt somit einen einzigen singulären Punkt mit den homogenen Koordinaten

$$0:0:0:1:0.$$

Er ist das Bild des singulären akzessorischen Punktes aus § 19 und soll daher auch jetzt als S bezeichnet werden.

Entspricht so vermöge (27) jedem *eigentlichen* Punkte des Cremonaraumes eindeutig ein Punkt der M_3^2, so gilt das Umgekehrte nicht, wie die Umkehrungsformeln

$$(27a) \qquad x = \frac{X_1}{X_0 + X_4}, \quad y = \frac{X_2}{X_0 + X_4}, \quad z = \frac{X_3}{X_0 + X_4}.$$

zeigen: den Punkten des dreidimensionalen Raumes

$$X_0 + X_4 = 0$$

des R_4 sind keine eigentlichen Punkte des Cremonaraumes zugeordnet. Dagegen zeigen die Umkehrungsformeln

$$(28a) \quad \lambda_1\varrho_1 : \lambda_1\varrho_2 : \lambda_2\varrho_1 : \lambda_2\varrho_2 : \nu = X_0 + X_4 : X_1 - X_2 : X_1 + X_2 : X_0 - X_4 : X_3,$$

daß diese Punkte $X_0 + X_4 = 0$ *Bilder von akzessorischen Punkten sind.* Sie gliedern sich folgendermaßen:

1) $X_0 + X_4 = 0$, $X_1 + X_2 = 0$. Es liegt eine *Ebene* auf M_3^2 vor, deren Punkte sich aus der Parameterdarstellung

$$\sigma_0 : \sigma_1 : -\sigma_1 : \sigma_2 : -\sigma_0$$

ergeben. Wie aus (28a) hervorgeht, liegt das Bild der akzessorischen Rechtsebene vor $(\varrho_1 = 0)$.

2) $X_0 + X_4 = 0$, $X_1 - X_2 = 0$. Auch hier liegt eine *Ebene* auf M_3^2 vor mit dem Punktfeld

$$\sigma_0 : \sigma_1 : \sigma_1 : \sigma_2 : -\sigma_0.$$

Sie ist das Bild der akzessorischen Linksebene des Cremonaraumes $(\lambda_1 = 0)$.

3) Diese beiden Ebenen haben die Gerade

$$X_0 + X_4 = X_1 = X_2 = 0$$

des R_4 gemeinsam mit der Punktreihe

$$\sigma_0 : 0 : 0 : \sigma_2 : -\sigma_0.$$

Ihr entspricht im Cremonaraum die ausgezeichnete Vertikale (§ 15). Auf ihr liegt $(\sigma_2 = 0)$ das Bild des Stützpunktes (§ 20) und $(\sigma_0 = 0)$

4) der Punkt S $(X_0 = X_1 = X_2 = X_4 = 0,\ X_3 \neq 0)$.

§ 24. Durch die Formeln (27a), (28a) wird die M_3^2 in den Cremonaraum eingebaut, und das ist erst durch die Einführung der akzessorischen Punkte möglich geworden.

Projektiv äquivalent zu unserer M_3^2 sind im R_4 ∞^{13} solcher Gebilde, und daher verträgt die M_3^2 eine *Kollineationsgruppe* des R_4, die von $24 - 13 = 11$ Parametern abhängt. Diese Kollineationsgruppe ist natürlich zu (G_{11}, H_{11}) isomorph. Letztere begründet, wie wir wissen, eine Cremonasche Geometrie, und für die Terminologie darin

ist demnach die wohlbekannte und allgemein geläufige des projektiven R_4 maßgebend. So ist es Zwang, als gerade Linien im Cremonaraum nur die Bilder gerader Linien auf M_3^2 zu bezeichnen, als Ebenen im Cremonaraum nur die Bilder von Ebenen auf M_3^2. Eine sonstige Ebene affiner Auffassung im Cremonaraum ist nicht mehr Ebene im Sinne der Cremonaschen Geometrie. Das kann als Vergewaltigung nicht mehr empfunden werden, als wenn in der konformen Geometrie Figuren, die wir Ebenen zu nennen gewohnt sind, als Kugeln angesprochen werden. Leider ist dies klare einfache terminologische Prinzip nur zu einem Teil durchführbar; man kommt dabei bald ins Gedränge. Bei den geraden Linien und Ebenen läßt es sich noch anwenden; man darf also von akzessorischen Punkten oder Ebenen *auch des* R_4 reden.

Jeder von S verschiedene Punkt der M_3^2 kann mit S durch eine Gerade verbunden werden, die ganz auf der M_3^2 liegt. Durch jede dieser erzeugenden geraden Linien laufen zwei erzeugende Ebenen, die als Linksebene und Rechtsebene unterschieden werden können. Jede Gerade in einer dieser Ebenen ist auch noch erzeugende Gerade auf M_3^2, und weitere lineare Figuren gibt es auf M_3^2 nicht. Diese wohlbekannten Tatsachen aus der projektiven Geometrie des R_4 finden sich sämtlich im Cremonaraum wieder. Bilder der Erzeugenden durch S sind die Vertikalen (vgl. dazu § 19). Die Bilder der übrigen erzeugenden Geraden sind die Linksgeraden und Rechtsgeraden (§ 20). Aus (28a) folgt, daß die Linksebenen durch

$$X_1 + X_2 : X_0 + X_4 = X_0 - X_4 : X_1 - X_2 = \lambda_2 : \lambda_1 = \text{const.}$$

die Rechtsebenen durch

$$X_1 - X_2 : X_0 + X_4 = X_0 - X_4 : X_1 + X_2 = \varrho_2 : \varrho_1 = \text{const.}$$

dargestellt werden.

§ 25. Die Schnittfigur der M_3^2 mit dem Raume

$$\mathfrak{A}_0 X_0 + \mathfrak{A}_1 X_1 + \mathfrak{A}_2 X_2 + \mathfrak{A}_3 X_3 + \mathfrak{A}_4 X_4 = 0$$

(Raumkoordinaten sollen durch große deutsche Buchstaben wiedergegeben werden) weist drei verschiedene Typen auf. Man sieht hier deutlich, daß es nicht angängig ist, die zugehörigen Figuren des Cremonaraumes als Räume zu bezeichnen, wie das Prinzip es verlangen würde.

Die Schnittfigur ist eine M_2^2, die die Rangzahlen vier, drei, zwei haben kann.

1) Für $\mathfrak{A}_3 \neq 0$ vermeidet der Raum $\mathfrak{A}$ den Punkt S. Hier haben wir im Cremonaraum von einer *Hauptfläche* gesprochen. Sie ist Bild einer *singularitätenfreien* M_2^2.

2) $\mathfrak{A}_3 = 0$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \neq 0$. Der Raum läuft durch S und schneidet M_3^2 in einem Kegel (Rang drei). Im Cremonaraum liegt ein *irreduzibler Vertikalzylinder* vor.

3) $\mathfrak{A}_3 = 0$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = 0$. Auch hier läuft der Raum durch S, aber er schneidet M_3^2 in einem Paare getrennter Ebenen. *Reduzibler Vertikalzylinder.*

Man kann diese Räume auch so charakterisieren:

1) Nicht-Polarräume

2) Nicht berührende Polarräume

3) Tangentialräume von M_3^2.

Ein Polarraum muß nämlich durch S laufen. Wohl hat ein Punkt des R_4, *der nicht auf* M_3^2 *zu liegen braucht*, wenn er von S verschieden ist, einen Polarraum, aber umgekehrt hat der Polarraum keinen eindeutigen Pol; alle Pole liegen auf einer Geraden des R_4, die durch S läuft, aber der M_3^2 nicht anzugehören braucht.

§ 26. Jetzt sollen die Schnittfiguren der M_2^2 mit Ebenen des R_4 betrachtet werden. Ihre Bilder im Cremonaraum dürfen nicht mehr durchweg als Ebenen bezeichnet werden, weil sie (als Punktmannigfaltigkeiten) verschiedene Dimensionen aufweisen. Den erzeugenden Ebenen von M_3^2 sind allerdings noch Ebenen des Cremonaraumes zugeordnet, den übrigen aber, die die M_3^2 längs eines Kegelschnittes treffen, die Figuren, die wir als Zylinderschnitte bezeichnet haben. Wir haben im R_4 also

1), 2) Ebenen auf M_3^2.

3), 4) Ebenen, die nicht mehr ganz auf M_3^2 liegen, aber durch S laufen. Im Cremonaraum gibt das die als *singuläre* Zylinderschnitte bezeichneten Figuren (§ 21).

5) Ebenen, die nicht mehr durch S laufen, und nicht in einem Tangentialraum verlaufen: *Reguläre irreduzible* Zylinderschnitte.

6) Nichterzeugende Ebenen eines Tangentialraumes, nicht durch S laufend: *Reguläre reduzible* Zylinderschnitte.

Der sachgemäße Apparat zur analytischen Behandlung der Zylinderschnitte besteht in dem System der zehn homogenen Ebenenkoordinaten des R_4. Wir wollen, ohne darauf einzugehen, noch das Punktgebiet des (regulären irreduziblen) Zylinderschnitts durch die Punkte A, B, C angeben.

Dazu brauchen wir eine Bedingung, die aussagt, daß irgend zwei Punkte nicht auf einer Linksgeraden *oder* einer Rechtsgeraden liegen. Führt man das Symbol ein

$$(XY) = X_0Y_0 - X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_4Y_4, \tag{30}$$

welches aus dem Symbol (XX) in (29) durch Polarisation entsteht und den Index 3 nicht enthält, so sagt die Gleichung $(AB) = 0$ (in Verbindung mit $(AA) = 0$, $(BB) = 0$) aus, daß die Punkte des Cremonaraumes A und B entweder derselben Linksebene oder derselben Rechtsebene angehören oder endlich, daß beides der Fall ist. Sei jetzt also

$$(BC)\,(CA)\,(AB) \neq 0.$$

Dann gibt

$$X = (BC)\,A\,\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2) + (CA)\,B\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1) + (AB)\,C\sigma_1\sigma_2 \tag{31}$$

den Punkt auf dem Zylinderschnitt durch A, B und C, der gegen diese drei Punkte das Doppelverhältnis $\sigma_1 : \sigma_2$ hat.

§ 27. Sei jetzt A ein Punkt des R_4, der nicht auf M_3^2 liegt, also $(AA) \neq 0$. Er vermittelt eine kollineare involutorische Abbildung des R_4 auf sich selbst, bei der die M_3^2 als Ganzes in Ruhe bleibt. Ist X ein Punkt von M_3^2, so ist der Bildpunkt X' der andere Schnittpunkt von AX mit M_3^2. Natürlich werden X und X' harmonisch getrennt durch A und seinen Polarraum. Dessen Punkte bleiben sämtlich in Ruhe, insonderheit die auf M_3^2.

Das gibt im Cremonaraum eine involutorische Punkttransformation, bei der alle Punkte eines *irreduziblen Vertikalzylinders* stehen bleiben. Da der Polarraum von A durch S läuft, bleibt S in Ruhe, im Cremonaraum wird daher jede Vertikale wieder in eine Vertikale übergeführt. Diese involutorische Vertikalentransformation kennen wir aber bereits aus § 16, wo wir sie als *Spiegelung* am Vertikalzylinder bezeichnet haben. Dasselbe Wort wollen wir auch jetzt für die Punkttransformation benutzen. Dabei ist dann allerdings zu beachten, daß es zu einem vorgegebenen irreduziblen Vertikalzylinder ∞^1 solcher Spiegelungen gibt; wenn man nämlich den Punkt A des R_4 auf der Geraden AS des R_4 spielen läßt, so erhält man eine andere Punkttransformation, aber denselben vertikalen Ruhezylinder. Und auch dieselbe Vertikalentransformation, denn die Punkte

A, S, X liegen in einer Ebene, in der auch X' liegt, also auch die beiden Erzeugenden XS und $X'S$. Bei festgehaltenem X kann jetzt A wieder auf AS spielen, ohne daß sich jene Ebene ändert. Wohl ändert sich X', aber nicht $X'S$.

Die Transformation heißt so:

$$X' = 2(AX)\,A - (AA)\,X, \qquad (AA) \neq 0, \tag{32}$$

und $(AX) = 0$ gibt den Ruhevertikalzylinder.

In inhomogenen Punktkoordinaten des Cremonaraumes heißt die Transformation so:

$$Nx' = \Omega A_1 - (AA)\,x, \quad Ny' = \Omega A_2 - (AA)\,y, \quad Nz' = \Omega A_3 - (AA)\,z.$$

Dabei ist abgekürzt

$$N = (A_0 + A_4)\,\Omega - (AA), \quad \Omega = (A_0 + A_4)\,(x^2 - y^2) - 2A_1 x + 2A_2 y + A_0 - A_4.$$

Für $A_0 + A_4 = 0$ liegt eine Affinspiegelung vor (der spiegelnde Zylinder läuft durch den Stützpunkt, und erscheint daher affin gesehen als Vertikalebene).

Ist aber $A_0 + A_4 \neq 0$, so folgt leicht

$$x' - \frac{A_1}{A_0 + A_4} : y' - \frac{A_2}{A_0 + A_4} : z' - \frac{A_3}{A_0 + A_4} = x - \frac{A_1}{A_0 + A_4} : y - \frac{A_2}{A_0 + A_4} : z - \frac{A_3}{A_0 + A_4}.$$

Das heißt aber: Die Verbindungsgerade XX' läuft durch den festen eigentlichen Punkt

$$\left(\frac{A_1}{A_0 + A_4}, \quad \frac{A_2}{A_0 + A_4}, \quad \frac{A_3}{A_0 + A_4}\right),$$

der auf der Mittelgeraden des spiegelnden Vertikalzylinders liegt. Da die Vertikale von X' uns bereits durch die Konstruktion von § 16 bekannt ist, so ist diese Konstruktion so anschaulich, wie sie nur verlangt werden kann. *Aber sie ist nicht invariant*!

§ 28. Um eine invariante Beschreibung der Transformation geben zu können, müssen wir noch eine Reihe von vorbereitenden Überlegungen anstellen. Zunächst bemerken wir, daß der Polarraum $\mathfrak{A}$ von A durch

$$\mathfrak{A}_0 = A_0, \quad \mathfrak{A}_1 = -A_1, \quad \mathfrak{A}_2 = A_2, \quad \mathfrak{A}_3 = 0, \quad \mathfrak{A}_4 = -A_4$$

gegeben ist, während die Polare dieses Raumes der Ort aller Punkte mit den homogenen Punktkoordinaten

$$\mathfrak{A}_0 : -\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \tau\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{A}} : -\mathfrak{A}_4$$

ist. Die zwei zu zueinander normalen Zylindern (§ 17) gehörigen Räume des R_4 haben daher die Eigenschaft, *daß jeder von ihnen durch die Polare des andern läuft.*

Die Spiegelung führt nun im R_4 als Kollineation Räume in Räume über. Da der Punkt A in Ruhe bleibt, so folgt, daß im Cremonaraum Hauptflächen wieder in Hauptflächen übergehen, und insbesondere die Hauptflächen, die Räumen durch A entsprechen, nur unter sich vertauscht werden. Aber mehr: sie bleiben einzeln in Ruhe. Denn ein Raum durch A schneidet den Polarraum von A längs einer Ebene, die punktweise stehenbleibt.

Damit gibt es bei einer Spiegelung ∞^4 Ruhehauptflächen, von denen durch jeden regulären Zylinderschnitt des spiegelnden Zylinders ein einziger läuft. Zwei dieser Ruhehauptflächen schneiden sich in einem Zylinderschnitt, *dessen Zylinder zum spiegelnden Zylinder normal ist.* Es gibt ∞^4 solcher Zylinderschnitte, die wir als *normal in bezug* auf *die Spiegelung* bezeichnen wollen, entsprechend den ∞^4 Ebenen des R_4 durch den Punkt A, von denen jede Ebene mit S durch einen Raum verbunden werden kann.

Durch jeden Punkt des Cremonaraumes laufen ∞^2 solcher zur Spiegelung normaler

Zylinderschnitte, und da jeder von ihnen bei der Spiegelung als Ganzes in Ruhe bleibt, laufen die ∞^2 normalen Zylinderschnitte durch den Punkt P auch durch den Punkt P'. Bei gegebenem P und P' erhält man diese ∞^2 Zylinderschnitte so: *Man legt durch P und P' alle Vertikalzylinder, und auf jedem von ihnen alle Zylinderschnitte durch P und P'.*

Ist nun der spiegelnde Zylinder gegeben, so läßt sich bei vorgegebenem P, welches nicht auf dem Zylinder liegt, P' nach § 27 noch auf ∞^1 Arten vorschreiben. *Der Bildpunkt X' von X liegt dann auf dem Zylinderschnitt $PP'X$, und wird auf diesem von X durch P und P' harmonisch getrennt.* Nach (31) ist dann

$$X' = 2(P'X)P + 2(PX)P' - (PP')\,X.$$

Damit ist jede Spiegelung an einem Vertikalzylinder invariant beschrieben.

§ 29. Jede Spiegelung an einem Vertikalzylinder gehört der Schar H_{11} an. Ihre Betrachtung im R_4 zeigt, daß sie ein gewisses Analogon zur Inversion an einer Kugel in der konformen Geometrie bildet. Dort kann man nun bekanntlich die ganze konforme Gruppe durch Zusammensetzung von Inversionen erhalten. *Das Entsprechende gilt hier nicht.* Die eingehende Untersuchung der Gruppe (G_{11}, H_{11}) stellt ein bereits sehr umfangreiches Unternehmen dar. Wir wollen uns hier daher mit der Aufzählung einiger Transformationen begnügen, die besonderes Interesse beanspruchen können. So gibt es in H_{11} an weiteren involutorischen Transformationen noch die Spiegelungen an irreduziblen Zylinderschnitten. Die involutorischen Transformationen von G_{11} können, wenn man von der Identität absieht, auf drei Arten verteilt werden. Es sind das Umwendungen um Paare getrennter Punkte, Umwendungen um Hauptflächen, sowie Transformationen, bei denen eine Linksebene [Rechtsebene] und eine dazu windschiefe Linksgerade [Rechtsgerade] punktweise stehen bleiben.

Die Transformationen von G_{11}, die sich aus *zwei* Spiegelungen an Vertikalzylindern zusammensetzen lassen, sind

$$1)\quad X' = (\delta - 1)\,\{\delta(DX)\,C - (CX)\,D\} + \delta(CD)\,X,\quad \delta(\delta - 1) \neq 0,\quad (CD) \neq 0.$$

Für $\delta = -1$ erhält man daraus die bereits erwähnte Umwendung um das Punktepaar (C, D). Wählt man D auf dem Stützpunkt, C eigentlich, so erhält man die Streckungen von C aus.

$$2)\quad X' = 2\delta\,\{(AX)\,C - (CX)\,A - \delta(CX)\,C\} + (AA)X,\quad \delta \neq 0,\quad (AA) \neq 0\,.$$

Dazu gehören die Schiebungen

$$x' = x + a,\quad y' = y + b,\quad z' = z + c,\qquad a^2 - b^2 \neq 0.$$

$$3)\qquad X_i' = X_i\ (i = 0, 1, 2, 4),\qquad X_3' = X_3 + \frac{2\delta}{\sqrt{AA}}\,(AX).$$

§ 30. Wir gehen jetzt an die Beantwortung der Frage: Lassen sich im Cremonaraum hinreichend einfache Figuren des (nunmehr *affin* zu beschreibenden!) Gebietes der *eigentlichen* Punkte angeben, die die akzessorischen Punkte in demselben Sinne vertreten können, wie man die uneigentlichen Punkte des projektiven Raumes durch Bündel paralleler eigentlicher gerader Linien ersetzt?

Zunächst kann das geschehen, wenn ein Punkt ersetzt wird durch die Mannigfaltigkeit aller *geraden Linien* durch ihn. So erhält man befriedigende Bilder aller akzessorischen Punkte, *die nicht auf der ausgezeichneten Vertikalen liegen.*

Ein eigentlicher Punkt ist dann zu ersetzen durch das Linksgeradenbüschel und das Rechtsgeradenbüschel durch ihn. Ein Punkt der akzessorischen Linksebene noch durch *ein* Büschel von parallelen Rechtsgeraden einer Rechtsebene. Für die Punkte der

ausgezeichneten Vertikalen kommt man auf diesem Wege aber nicht aus dem akzessorischen Gebiet heraus.

Der zweite denkbare Weg, einen Punkt durch die Menge aller *Ebenen* darzustellen, die durch ihn hindurchlaufen, kann nicht zum Ziel führen; er würde ja auf eine Deutung nicht von akzessorischen Punkten, sondern nur von akzessorischen Vertikalen führen.

Jetzt stehen noch zwei Wege zur Verfügung. Im R_4 kann man den Punkt vertreten lassen durch die Gesamtheit aller durch ihn laufenden Ebenen oder Räume, im Cremonaraum also durch Gebüsche von Hauptflächen oder durch Scharen von je ∞^4 Zylinderschnitten. Der erste dieser beiden Wege genügt bereits; was über den zweiten zu sagen ist, läßt sich sogleich mit erledigen.

Im Falle eines eigentlichen Punktes liegen natürlich alle Hauptflächen durch ihn vor (alle Zylinderschnitte durch ihn).

Ist der akzessorische Punkt

$$\sigma_0 : \sigma_1 : -\sigma_1 : \sigma_2 : -\sigma_0 \qquad (\sigma_1 \neq 0),$$

der in der akzessorischen Rechtsebene und in der Linksebene $x + y = \sigma_0 : \sigma_1$ liegt, zu deuten, so erhält man ∞^3 Hauptflächen, die von der Linksebene in einem Parallelenbüschel geschnitten werden. Das ist natürlich dasselbe Büschel, welches uns bereits begegnet ist. Die Vertikalzylinder im Hauptflächengebüsch haben sämtlich die Linksebene zur gemeinsamen Asymptotenebene, und damit ist auch die Schar der ∞^4 Zylinderschnitte geliefert; sie werden aus diesen Vertikalzylindern herausgeschnitten durch das Bündel von Ebenen durch den uneigentlichen Punkt, der durch das mehrfach erwähnte Parallelenbüschel von Linksgeraden bestimmt ist.

Für den singulären Punkt geht das Hauptflächengebüsch über in die Gesamtheit aller Vertikalzylinder; die zugehörigen ∞^4 Zylinderschnitte bestehen aus allen Vertikalenpaaren, sind also sämtlich singulär (§ 21).

Für den Stützpunkt besteht das Flächengebüsch aus allen Ebenen (im Sinne der Affingeometrie!); die Zylinderschnittschar aus allen geraden Linien, wieder im Sinne der Affingeometrie.

Liegt endlich der Punkt

$$\sigma_0 : 0 : 0 : \sigma_2 : -\sigma_0$$

vor, für den jetzt $\sigma_0 \sigma_2 \neq 0$ zu nehmen ist, so ist das Hauptflächengebüsch dadurch ausgezeichnet, daß es die Gruppe aller Schiebungen verträgt. Es ist also durch die Fläche

$$\sigma_2 (x^2 - y^2) - 2\sigma_0 z = 0,$$

die durch den Nullpunkt läuft, völlig bestimmt; die beiden erzeugenden Geraden in diesem sind horizontal. Die zugehörige Zylinderschnittschar besteht aus vertikal gestellten Parabeln. —

Noch einige Worte über den Stützpunkt. Er hat keine besondere Bedeutung, sondern kann ganz beliebig im akzessorischen Gebiet angenommen werden; nur mit dem singulären akzessorischen Punkt darf er nicht zusammenfallen. Bei unserer Darstellung ist er durch die Abbildungsformeln (27) bedingt; diese Formeln können aber auf ∞^{11} Arten abgeändert werden.

Kapitel IV.

Zusammenhang der Ternionengeometrie mit anderen geometrischen Disziplinen.

§ 31. Während im vorigen Abschnitt der Cremonaraum auf einen projektiven R_4 abgebildet wurde, soll er jetzt auf einen *euklidischen* R_4 bezogen werden.

In homogenen Punktkoordinaten $\xi_\omega : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ des R_4 sei der Raum u durch die Gleichung

$$u_\omega \xi_\omega + u_0 \xi_0 + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

gegeben. Sodann soll $\xi_\omega = 0$ den uneigentlichen Raum des R_4 darstellen. In diesem liegt die *absolute Fläche*, die durch

$$\xi_\omega = 0, \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$$

geliefert werde. Dann ist der Raum u *anisotrop* für

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0,$$

d. h. er trifft die absolute Fläche in einem irreduziblen Kegelschnitt. Für

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

liegt, wenn nicht alle vier u gleichzeitig verschwinden, ein *Minimalraum* vor. Er hat einen „Berührungspunkt"; damit ist der singuläre Punkt des reduziblen Kegelschnitts gemeint, in welchem er die absolute Fläche trifft. Parallele Minimalräume haben denselben Berührungspunkt.

Der projektive R_4 mit den homogenen Punktkoordinaten

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4$$

soll jetzt auf den euklidischen R_4 *korrelativ* bezogen werden vermöge der Formeln

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = iu_2 : u_3 : -iu_0 : iu_\omega : -u_1 .$$

Einem Punkte des projektiven R_4 ist dabei ein Raum des euklidischen R_4 zugeordnet. *Liegt der Punkt X insbesondere auf der M_3^2,*

$$X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_4^2 = 0,$$

so ist der zugeordnete Raum u ein Minimalraum, und umgekehrt. Damit läßt sich dem Minimalraum u auch zuordnen der Punkt

$$\lambda_1 \varrho_1 : \lambda_1 \varrho_2 : \lambda_2 \varrho_1 : \lambda_2 \varrho_2 : v = -u_1 + iu_2 : u_3 - iu_0 : u_3 + iu_0 : u_1 + iu_2 : iu_\omega$$

des Cremonaraumes oder also, in Formeln, die nicht so viel leisten,

$$x = \frac{-u_3}{u_1 - iu_2}, \quad y = \frac{iu_0}{u_1 - iu_2}, \quad z = \frac{-iu_\omega}{u_1 - iu_2}.$$

§ 32. Die hieraus sich ergebenden Beziehungen zwischen dem euklidischen und dem Cremonaraum sollen tabellarisch zusammengestellt werden.

Euklidischer R_4.	*Cremonaraum*
Minimalraum	Punkt
Büschel paralleler Minimalräume	Vertikale
Minimalräume, deren Berührungspunkte eine „Linkserzeugende" der absoluten Fläche erfüllen.	Linksebene
Eigentlicher Punkt (Ort von Minimalräumen)	*Hauptfläche*
Uneigentlicher Punkt	Vertikalzylinder
Er liegt nicht auf der absoluten Fläche	Er ist irreduzibel
Punkt der absoluten Fläche	Reduzibler Vertikalzylinder

Der Hauptfläche $\mathfrak{A}$ von der Gleichung (21), § 20 ist so zugeordnet der Punkt des R_4 mit den Koordinaten

$$\xi_\omega : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \mathfrak{A}_3 : -\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_4 i : \mathfrak{A}_0 : -\mathfrak{A}_1 i .$$

Eigentliche Gerade	Regulärer Zylinderschnitt
Sie ist anisotrop	Er ist irreduzibel
Sie ist Minimalgerade	Er ist reduzibel
Uneigentliche Gerade	Singulärer Zylinderschnitt
Sekante der absoluten Fläche	Paar getrennter Vertikalen
Tangente der absoluten Fläche	Büschel berührender Vertikalzylinder
Erzeugende der absoluten Fläche	Alle Vertikalzylinder des Büschels sind reduzibel und haben eine Ebene gemeinsam
Ebene als Ort von Punkten	Bündel von Hauptflächen
Ebene als Ort von Minimalräumen	Punktepaar
Eine eigentliche Gerade hat einen uneigentlichen Punkt	Ein regulärer Zylinderschnitt liegt auf einem Vertikalzylinder
Parallele (eigentliche) gerade Linien	Zylinderschnitte desselben Vertikalzylinders.

§ 33. Da die Gruppe (G_{11}, H_{11}) isomorph ist zur Gruppe der automorphen Kollineationen der M_3^2 des projektiven R_4, so ist auch sie auf eine Kollineationsgruppe des euklidischen R_4 bezogen:

Kollineation	Hauptflächentransformation
Affinität	Die Vertikalzylinder werden unter sich vertauscht
Automorphe Affinität der absoluten Fläche	Reduzible Vertikalzylinder bleiben reduzibel
Gleichsinnige Dehnung	Transformation von G_{11}.
Gegensinnige Dehnung	Transformation von H_{11}.

Für die Gruppe der Dehnungen im R_4 gibt es nun eine sehr befriedigende Darstellung mittelst Hamiltonscher Quaternionen. In § 11 haben wir auf beträchtliche Mängel hingewiesen, die das Arbeiten mit Ternionen mit sich führt. *Diese werden überwunden, wenn man statt mit vier Ternionen mit drei Hamiltonschen Quaternionen arbeitet. Als Raumelement im Cremonaraum ist dabei einzuführen die Hauptfläche. Und analytisch wird sie durch eine Hamiltonsche Quaternion dargestellt.*

So kann der Hauptfläche $\mathfrak{A}$ von der Gleichung (21) zugeordnet werden die Quaternion

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 e_0 + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3$$

mit

$$\varphi_0 = -\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3, \quad \varphi_1 = \mathfrak{A}_4 i : \mathfrak{A}_3, \quad \varphi_2 = \mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}_3, \quad \varphi_3 = -\mathfrak{A}_1 i : \mathfrak{A}_3 .$$

Setzt man jetzt für die Koeffizienten A, B, C, D in (3) bzw. (5) die Quaternionen an

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= D_0 - D_1 + A_0 - A_1, & \alpha_1 &= -i(C_0 - C_1 + B_0 - B_1),\\
\alpha_2 &= C_0 - C_1 - B_0 + B_1, & \alpha_3 &= -i(D_0 - D_1 - A_0 + A_1),\\
\beta_0 &= \quad D_2 + A_2, & \beta_1 &= -i(C_2 + B_2),\\
\beta_2 &= \quad C_2 - B_2, & \beta_3 &= -i(D_2 - A_2),\\
\delta_0 &= D_0 + D_1 + A_0 + A_1, & \delta_1 &= -i(C_0 + C_1 + B_0 + B_1),\\
\delta_2 &= C_0 + C_1 - B_0 - B_1, & \delta_3 &= -i(D_0 + D_1 - A_0 - A_1),
\end{aligned}$$

so läßt sich die Gruppe G_{11} so darstellen:

$$\varphi' = \delta^{-1}(\varphi\alpha + \beta)\ ^{3}).$$

§ 34. Die Abbildung des Cremonaraumes auf den euklidischen R_4 weist auch den Weg zur Bildung *absoluter* Invarianten, die wir bisher ganz zurückgestellt haben. Wir wollen uns mit einigen Andeutungen darüber begnügen, und nehmen unsere Tabelle wieder auf:

Euklidischer R_4	*Cremonaraum*
Zwei uneigentliche Punkte, die in bezug auf die absolute Fläche konjugiert sind	Zwei zu einander normale Vertikalzylinder
Reziproke Polaren	Reziproke Büschel von Vertikalzylindern (§ 17)
Ihre vier Schnittpunkte mit der absoluten Fläche	Die vier reduziblen Vertikalzylinder durch zwei reziproke Vertikalenpaare
Der Abstand zweier uneigentlichen Punkte ξ und η im Sinne der in der uneigentlichen Raume herrschenden elliptischen Maßbestimmung vom Krümmungsmaß eins	Absolute Invariante der beiden Vertikalzylinder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, gegeben durch $\cos\varphi = \dfrac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}}$
Euklidischer Winkel zweier eigentlichen nicht parallelen Geraden	Absolute Invariante zweier Zylinderschnitte, die nicht demselben Vertikalzylinder angehören.

Die nähere Ausführung des hiermit gegebenen Programms macht komplizierte Realitätsunterscheidungen nötig.

Schubstreckung	Jede Vertikale wird in sich selbst transformiert
Streckung	Eine Hauptfläche bleibt punktweise stehen
Umwendung um einen Punkt	Umwendung um eine Hauptfläche (§ 29)
Bewegung	In (6) ist $\Delta_1 = \Delta_2$ zu nehmen

Damit hat die Gruppe (G_{11}, H_{11}) eine *invariante* Untergruppe (G_{10}, H_{10}).

Quadrat der euklidischen Entfernung	Der aus zwei Hauptflächen gebildete Ausdruck (§ 21) $\dfrac{(\mathfrak{A}\mathfrak{A})\,\mathfrak{B}_3^2 - 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3 + (\mathfrak{B}\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_3^2\mathfrak{B}_3^2}$

§ 35. Nachdem die Beziehungen des Cremonaraumes zum euklidischen R_4 behandelt sind, soll jetzt eine Abbildung des Cremonaraumes auf einen *dreidimensionalen* euklidischen Raum gegeben werden. Dieser soll in der Formelsprache von § 31 die Gleichung haben

$$\xi_0 = 0.$$

Das hat den großen Vorteil, daß das Nachfolgende in der allgemein für den euklidischen R_3 geltenden Bezeichnungsweise gilt, ohne daß dabei die Beziehung auf den R_4 verloren geht.

Im R_3 sind jetzt die homogenen Punktkoordinaten durch

$$\xi_\omega : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$$

---

[3]) Näheres über die Herleitung dieser Formeln in Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 517—518.

gegeben. Die absolute Fläche des R_4 wird vom R_3 in

$$\xi_\omega = 0,\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$$

geschnitten, womit man die allgemein übliche Darstellung des imaginären Kugelkreises hat.

Der Raum u des R_4 schneidet unsern R_3 jetzt längs der Ebene

$$u_\omega\xi_\omega + u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0\,.$$

Unter den ∞^1 Räumen des R_4, die diese Ebene aus R_3 herausschneiden, befinden sich auch zwei Minimalräume, und daher kann man die Beziehung zwischen den Minimalräumen des R_4 und ihren Schnittebenen mit R_3 umkehrbar eindeutig gestalten, wenn man die Ebene orientiert oder mit zwei *Blättern* überdeckt. Mit welchem Rechte man dies Verfahren als Minimalprojektion bezeichnet, bleibe dahingestellt.

Die orientierte Ebene oder das Blatt hat *fünf* homogene Koordinaten. Wir wollen sie, um Verwechslungen mit Raumkoordinaten des R_4 vorzubeugen, durch die Buchstaben v wiedergeben.

Das Blatt $v_\omega : v_0 : v_1 : v_2 : v_3$ geht aus der nicht orientierten Ebene

$$v_\omega\xi_\omega + v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0$$

dadurch hervor, daß man dieser die Stellungskosinus gegen die Koordinatenachsen

$$\cos\varphi_i = v_i : v_0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zuweist. Dadurch sind gleichzeitig die beiden Schnittpunkte

$$\xi_\omega : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 0 : 1 - m^2 : i(1 + m^2) : -2m$$

der unorientierten Ebene mit dem absoluten Kegelschnitt in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt. Wir wollen sie als *Hauptpunkt* und *Nebenpunkt* bezeichnen. Der Hauptpunkt soll der sein, für den

$$m = -v_3 - v_0 : v_1 - iv_2 = v_1 + iv_2 : v_3 - v_0\,.$$

Für den Nebenpunkt ist dann zu nehmen

$$m = -v_3 + v_0 : v_1 - iv_2 = v_1 + iv_2 : v_3 + v_0\,.$$

Vertauschung von Hauptpunkt und Nebenpunkt bedeutet Übergang zum entgegengesetzten Blatt $v_\omega : -v_0 : v_1 : v_2 : v_3$. Zu sich selbst entgegengesetzt sind die Minimalblätter und das uneigentliche Blatt. Die Blätter, die denselben Hauptpunkt und denselben Nebenpunkt haben, heißen syntaktisch.

§ 36. Jetzt soll dem Minimalraum u des euklidischen R_4 zugeordnet werden das Blatt

$$v_\omega : v_0 : v_1 : v_2 : v_3 = u_\omega : -iu_0 : u_1 : u_2 : u_3\,.$$

Dadurch wird dem Blatt v nach § 31 umkehrbar eindeutig zugeordnet der Punkt des Cremonaraumes mit den Parametern

$$\lambda_1\varrho_1 : \lambda_1\varrho_2 : \lambda_2\varrho_1 : \lambda_2\varrho_2 : \nu = -v_1 + iv_2 : v_3 - v_0 : v_3 + v_0 : v_1 + iv_2 : iv_\omega\,.$$

Soweit dieser Punkt nicht-akzessorisch ist, gelten die Formeln

$$x = \frac{-v_3}{v_1 - iv_2},\quad y = \frac{-v_0}{v_1 - iv_2},\quad z = \frac{-iv_\omega}{v_1 - iv_2}\,.$$

Jetzt haben wir folgende Gegenüberstellung:

Euklidischer R_3	*Cremonaraum*
Blatt	Punkt
Minimalblatt	Punkt auf dem Vertikalzylinder $y = 0$
Das uneigentliche Blatt	Der singuläre akzessorische Punkt

Syntaktisches Blattbüschel	Vertikale
Alle Blätter desselben Hauptpunktes	Linksebene
Alle Blätter desselben Nebenpunktes	Rechtsebene
Orientierte Kugel (Ort von Blättern)	*Hauptfläche*
Eigentlicher Punkt (Ort aller Blätter durch ihn)	Hauptfläche mit $\mathfrak{A}_2 = 0$
Orientierter Horozykel (orientierter Kreis im Sinne der in der uneigentlichen Ebene herrschenden elliptischen Geometrie) als Blattort	Irreduzibler Vertikalzylinder
Alle Blätter mit einem festen Hauptpunkt in Gemeinschaft mit allen Blättern mit einem festen Nebenpunkt	Reduzibler Vertikalzylinder
Rotationskegel (Rotationszylinder)	Irreduzibler Zylinderschnitt
Die Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen laguerreschen Blatttransformationen	Die Gruppe (G_{11}, H_{11}).

Damit erweist sich die Geometrie im Cremonaraum als Gegenstück zur laguerreschen Geometrie des dreidimensionalen Raumes, und es ist nicht übermäßig schwer, den Zusammenhang beider Disziplinen auch konstruktiv zu verfolgen.

§ 37. Schließlich kann der Cremonaraum noch zum *projektiven* dreidimensionalen Raum in Beziehung gesetzt werden. Seien in diesem

$$\xi_\omega : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$$

homogene Punktkoordinaten. Dann ist es bequem, die Punkte der Ebene $\xi_\omega = 0$ als uneigentlich zu bezeichnen.

In der uneigentlichen Ebene zeichnen wir die Gerade $\xi_\omega = \xi_1 = 0$ aus. Sie ist Achse eines *Geradengebüsches* (eines speziellen Gewindes). Der Geraden dieses Gebüsches mit den Plückerschen Strahlenkoordinaten P_{ik} ordnen wir den Punkt

$$\lambda_1 \varrho_1 : \lambda_1 \varrho_2 : \lambda_2 \varrho_1 : \lambda_2 \varrho_2 : \nu = P_{\omega 2} : P_{\omega 3} : P_{12} : -P_{31} : P_{23}$$

des Cremonaraumes zu, wobei noch zu beachten ist, daß stets $P_{\omega 1} = 0$ ist. Jetzt haben wir folgende Gegenüberstellung:

Geradengebüsch	*Cremonaraum*
Gerade	Punkt
Geradenfeld in einer Ebene durch die Achse	Linksebene
Feld aller uneigentlichen Geraden	akzessorische Linksebene
Geradenbündel im Gebüsch	Rechtsebene
Das Bündel aller „Vertikalen“	akzessorische Rechtsebene
Geradenbüschel, dessen Scheitel und Ebene der Achse angehören	Vertikale
Geradenbüschel, Ebene durch die Achse, Scheitel nicht auf der Achse *oder* *Punkt*, der nicht auf der Achse liegt	Linksgerade
Geradenbüschel, Scheitel auf der Achse, Ebene nicht durch die Achse *oder* *Ebene*, die nicht durch die Achse läuft	Rechtsgerade
Nicht-spezielles Geradennetz im Gebüsch	*Hauptfläche*

oder	
Nicht-Gebüschgerade (Leitgerade)	Hauptfläche
Spezielles Netz im Gebüsch	Vertikalzylinder
Bündelfeld (Feldebene durch die Achse, Scheitel auf der Achse)	Reduzibler Vertikalzylinder
Regelschar auf einem Paraboloid	Irreduzibler Zylinderschnitt
Flächenelement	Reduzibler regulärer Zylinderschnitt
Die Gruppe aller Kollineationen und Korrelationen, die die Achse stehen lassen	Die Gruppe (G_{11}, H_{11}).

§ 38. Der Leser, der daran Anstoß nimmt, daß es im Cremonaraum nur ∞^3 gerade Linien gibt, vergißt, daß es im konformen dreidimensionalen Raum ebenso ist. Im konformen Raum gibt es gar keine Ebenen, im projektiven Raum ∞^3, im Cremonaraum ∞^1. So einschneidend wirkt sich die Einführung zweier akzessorischen Ebenen aus! Damit erhebt sich die Frage, ob die projektive Geometrie des Raumes durch das Auftreten einer einzigen nicht-eigentlichen Ebene charakterisiert werden kann. Das ist nun nicht der Fall. In der Tat gibt es eine Geometrie des Raumes mit einer Transformationsgruppe, die von *dreizehn* wesentlichen Parametern abhängt, die als Grenzfall der hier vorgeführten Theorie angesprochen werden kann, und bei der es nur eine einzige nicht-eigentliche Ebene gibt. Darüber handelt eine Note des Verfassers in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Bonn, den 16. Oktober 1935.

Eingegangen 18. Oktober 1935.

Eine neue Eigenschaft der pseudosphärischen Strahlenkongruenzen.

Von *Hans Jonas* in Berlin-Steglitz.

1. *Ziel der Untersuchung; einleitende Bemerkungen.* — Wir werden die folgenden Sätze beweisen:

I. *Legt man in einer pseudosphärischen Kongruenz durch den Mittelpunkt des Strahls die beiden zum Strahl und zueinander senkrechten, den Halbierungsebenen der Brennebenenwinkel angehörenden Querstrahlen, so durchlaufen diese zwei W-Kongruenzen, in denen die Asymptotenlinien der Brennmäntel denjenigen der pseudosphärischen Flächen entsprechen.*

II. *Wird die pseudosphärische Kongruenz durch simultane Bäcklund-Transformationen ihrer Brennflächen unter Heranziehung des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes in eine neue derartige Kongruenz übergeführt, so erfahren auch die Brennmäntelpaare der beiden, von den Querstrahlen gebildeten W-Kongruenzen asymptotische Transformationen; d. h. also: eine jede dieser vier Hilfsflächen hängt mit der durch analoge Konstruktion aus der transformierten pseudosphärischen Kongruenz erhaltenen durch eine sie beide berührende W-Kongruenz zusammen.*

Da man Satz II im Anschluß an die Zusammensetzung der Bäcklund-Transformationen nicht mühelos bestätigt, lag der Gedanke nahe, eine auf die sphärische Abbildung gegründete Transformationstheorie der pseudosphärischen Kongruenzen an den Anfang zu stellen. Es ist bekannt, daß auf der Bildkugel der Strahlrichtung den Asymptotenlinien der pseudosphärischen Brennflächen ein orthogonales Kurvennetz entspricht [1]); die rechtwinkligen Querstrahlen sind den beiden Kurventangenten parallel. Der gesuchte Prozeß, der sich auch unmittelbar aut den nicht uninteressanten Fall konjugiert-imaginärer Brennflächen ausdehnen läßt, ergibt sich in Gestalt einer Ribaucour-Transformation des sphärischen Orthogonalnetzes, also einer Spiegelung des begleitenden rechtwinkligen Dreikants an einer variablen Ebene. Für den gegenwärtigen Zweck erschien es mir allerdings vorteilhafter, diese Methode nicht unabhängig, sondern aus den Formeln des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes zu entwickeln.

Hingewiesen sei hier noch auf die bedeutsame Rolle, die das von uns betrachtete rechtwinklige Dreikant, von drei Parametern abhängig, in der Theorie der schiefen Weingartenschen Systeme spielt [2]). Es sind dies von Bianchi entdeckte, aus den Wein-

[1]) Die gleiche Eigenschaft kommt der allgemeineren Klasse von *W*-Kongruenzen zu, deren Brennmäntel in korrespondierenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß besitzen.

[2]) Bianchi, Sui sistemi obliqui di Weingarten, Annali di Mat. (3) **19** (1912), S. 251; ferner: Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, Annali di Mat. (3) **25** (1916), S. 129.

gartenschen Systemen mit konstanter Flexion durch simultane Liesche Transformation entstehende Scharen pseudosphärischer Flächen, die Bertrandsche Kurven zu Trajektorien haben. Sie treten wie jene in Paaren auf; dazwischen vermittelt eine bereits durch die Bestimmungselemente gegebene, von keinerlei Integration abhängende Bäcklund-Transformation. Aus der eigenartigen Tatsache, daß sich mit diesen geometrischen Gebilden noch zwei Scharen pseudosphärischer Kongruenzen mit paarweise konjugiert-imaginären Brennflächen verbinden [3]), entspringt ein Seitenstück zu dem Ergebnis der vorliegenden Untersuchung. Näheres hierüber wird ein Beitrag zur allgemeinen Theorie der W-Kongruenzen enthalten [4]).

2. *Formeln für die simultane Bäcklund-Transformation der pseudosphärischen Brennflächen.* — Es empfiehlt sich, im Gegensatz zu Bianchi und übereinstimmend mit der Darstellung, deren ich mich bei den schiefen Weingartenschen Systemen bedient habe [5]), die Differentialgleichungen für das Funktionenpaar θ, ω von der charakteristischen Konstanten c der zwischen den pseudosphärischen Brennflächen vermittelnden Bäcklund-Transformation frei zu halten. Das bedeutet eine von der üblichen etwas verschiedene Auffassung der Lieschen Transformation, durch die das Brennflächenpaar aus einem durch die Komplementärtransformation (für $c = 1$) verbundenen hervorgeht. Wir schreiben also die Differentialgleichungen in der Form:

$$(1) \qquad \theta_\alpha + \omega_\alpha = \sin(\theta - \omega), \qquad \theta_\beta - \omega_\beta = \sin(\theta + \omega).$$

Dabei sind 2θ und 2ω auf den Brennflächen die Winkel der Asymptotenlinien, α und β die diesen entsprechenden Parameter. Als Folgerung ergibt sich:

$$2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta, \qquad 2\omega_{\alpha\beta} = \sin 2\omega.$$

(x) und $(\bar{x})$ seien die pseudosphärischen Brennflächen. Unter Bevorzugung der ersteren führen wir das zugehörige, mit dem Koordinatenkreuz gleichstimmige rechtwinklige Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ ein, gebildet von den Hauptkrümmungsrichtungen $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ und der Richtung $X^{(3)}$ der Flächennormalen [6]). Es ist dann:

$$(2) \quad x_\alpha = c(\cos\theta X^{(1)} + \sin\theta X^{(2)}), \qquad x_\beta = \frac{1}{c}(\cos\theta X^{(1)} - \sin\theta X^{(2)}),$$

$$(3) \qquad \Sigma dx^2 = c^2 d\alpha^2 + 2\cos 2\theta d\alpha d\beta + \frac{1}{c^2} d\beta^2.$$

Für das Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ gelten die Differentialrelationen:

$$(4) \quad \begin{cases} X^{(1)}_\alpha = \theta_\alpha X^{(2)} + c\sin\theta X^{(3)}, & X^{(1)}_\beta = -\theta_\beta X^{(2)} + \frac{1}{c}\sin\theta X^{(3)}, \\ X^{(2)}_\alpha = -c\cos\theta X^{(3)} - \theta_\alpha X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = \frac{1}{c}\cos\theta X^{(3)} + \theta_\beta X^{(1)}, \\ X^{(3)}_\alpha = -c\sin\theta X^{(1)} + c\cos\theta X^{(2)}, & X^{(3)}_\beta = -\frac{1}{c}\sin\theta X^{(1)} - \frac{1}{c}\cos\theta X^{(2)}. \end{cases}$$

---

[3]) Jonas, Flächen mit Bertrandschen Kurven und pseudosphärische Flächen- und Strahlensysteme, Math. Ann. **103** (1930), S. 720.

[4]) Jonas, Ein allgemeiner Satz über W-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme, erscheint in den Math. Ann.

[5]) Vgl. § 2 der unter [3]) angeführten Arbeit.

[6]) Eine in x geschriebene Gleichung ist im folgenden durchweg vektoriell aufzufassen. Entsprechend schreibe ich auch Fläche (x) statt (x, y, z), Richtung X, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus sind, usw. Die Ableitungen nach den Variablen α und β werden durch Indizes bezeichnet.

Der zweite Brennmantel $(\bar{x})$ der pseudosphärischen Kongruenz ist durch

$$\bar{x} = x - \frac{2c}{1+c^2}(\cos\omega X^{(1)} + \sin\omega X^{(2)}) \tag{5}$$

gegeben; er hat das zu (3) analoge Quadrat des Linienelements:

$$\Sigma\, dx^2 = c^2 d\alpha^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha d\beta + \frac{1}{c^2} d\beta^2 . \tag{6}$$

Es genügt, für $(\bar{x})$ noch die Normalenrichtung anzumerken:

$$\bar{X}^{(3)} = \frac{2c}{1+c^2}(\sin\omega X^{(1)} - \cos\omega X^{(2)}) + \frac{1-c^2}{1+c^2} X^{(3)} . \tag{7}$$

Wir unterwerfen die pseudosphärische Fläche (x) einer Bäcklund-Transformation B_σ [7]), die durch eine Lösung θ_1 der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichung (gleichwertig mit dem Riccatischen Typus):

$$(\theta_1)_\alpha = -\theta_\alpha + k\sin(\theta_1 - \theta), \qquad (\theta_1)_\beta = \theta_\beta + \frac{1}{k}\sin(\theta_1 + \theta) \tag{8}$$

definiert sei, wobei die Konstante $k \neq \pm 1$ vorausgesetzt wird. Die in geometrischer Hinsicht für die Operation B_σ charakteristische Bianchische Konstante σ drückt sich durch k und c folgendermaßen aus:

$$\cos\sigma = \frac{2kc}{c^2+k^2}, \qquad \sin\sigma = \frac{c^2-k^2}{c^2+k^2} . \tag{9}$$

Für die transformierte Fläche haben wir die Darstellung:

$$x_1 = x + \cos\sigma(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)}) . \tag{10}$$

Ihr Hauptdreikant $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)})$ geht aus dem Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ durch die orthogonale Substitution

$$\begin{cases} X_1^{(1)} = \alpha_{11}X^{(1)} + \alpha_{12}X^{(2)} + \alpha_{13}X^{(3)}, & X_1^{(2)} = \alpha_{21}X^{(1)} + \alpha_{22}X^{(2)} + \alpha_{23}X^{(3)}, \\ & X_1^{(3)} = \alpha_{31}X^{(1)} + \alpha_{32}X^{(2)} + \alpha_{33}X^{(3)} \end{cases} \tag{11}$$

hervor, deren Koeffizienten die folgenden Werte haben [8]):

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\sigma\sin\theta\sin\theta_1, & \alpha_{12} = \cos\theta\sin\theta_1 + \sin\sigma\sin\theta\cos\theta_1, \\ & \alpha_{13} = \cos\sigma\sin\theta, \\ \alpha_{21} = \sin\theta\cos\theta_1 + \sin\sigma\cos\theta\sin\theta_1, & \alpha_{22} = \sin\theta\sin\theta_1 - \sin\sigma\cos\theta\cos\theta_1, \\ & \alpha_{23} = -\cos\sigma\cos\theta, \\ \alpha_{31} = -\cos\sigma\sin\theta_1, & \alpha_{32} = \cos\sigma\cos\theta_1, \quad \alpha_{33} = -\sin\sigma. \end{cases} \tag{12}$$

Zu (x_1) gehört als zweiter Brennmantel der transformierten pseudosphärischen Kongruenz eine vierte pseudosphärische Fläche $(\bar{x}_1)$. Die zu ihrer Bestimmung erforderliche Größe ω_1 wird durch die fundamentale Relation des Vertauschbarkeitssatzes geliefert. Dieser kann man verschiedene Formen geben:

$$\cos(\omega_1 - \theta) = \frac{(1+k^2)\cos(\theta_1 - \omega) + 2k}{1+k^2+2k\cos(\theta_1-\omega)}, \quad \sin(\omega_1 - \theta) = \frac{(1-k^2)\sin(\theta_1-\omega)}{1+k^2+2k\cos(\theta_1-\omega)}, \tag{13}$$

ferner:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_1 - \theta}{2} = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \omega}{2} \tag{14}$$

---

[7]) S. § 3 in der in Anm. [3]) zitierten Arbeit.

[8]) Die vorkommenden orthogonalen Substitutionen haben die Determinante + 1.

und schließlich, für unseren speziellen Zweck von Bedeutung:

$$\sin\frac{\theta_1-\omega-\omega_1+\theta}{2}=k\sin\frac{\theta_1-\omega+\omega_1-\theta}{2}. \tag{15}$$

Sämtliche Formeln (1)—(7) bestehen jetzt auch für den Index 1, und zwar bei gleichem Wert der Konstanten c. Insbesondere erfüllen also θ_1 und ω_1 die Differentialgleichungen (1); außerdem wird analog zu (5):

$$\bar{x}_1=x_1-\frac{2c}{1+c^2}(\cos\omega_1 X_1^{(1)}+\sin\omega_1 X_1^{(2)}). \tag{16}$$

Die vierte Fläche $(\bar{x}_1)$ hängt nun wieder mit $(\bar{x})$ durch eine Bäcklund-Transformation B_σ zusammen [9]), so daß vier solche Operationen mit zwei im Wechsel auftretenden Werten der charakteristischen Konstanten sich zum Zyklus vereinigen. Dies ist der geometrische Inhalt des Vertauschbarkeitssatzes.

3. *Mittelfläche und Hilfsdreikant; Beweis des Satzes* I. — Mit der gegebenen pseudosphärischen Kongruenz verbinden wir ein neues rechtwinkliges Dreikant $(\mathfrak{x}^{(1)},\mathfrak{x}^{(2)},\mathfrak{x}^{(3)})$, definiert durch die orthogonale Substitution [10]):

$$\begin{cases}\mathfrak{x}^{(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}(-\sin\omega X^{(1)}+\cos\omega X^{(2)}+cX^{(3)}),\\ \mathfrak{x}^{(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}(c\sin\omega X^{(1)}-c\cos\omega X^{(2)}+X^{(3)}),\\ \mathfrak{x}^{(3)}=\cos\omega X^{(1)}+\sin\omega X^{(2)}.\end{cases} \tag{17}$$

Der Scheitel sei der Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ des Strahls, gegeben durch:

$$\mathfrak{x}=\frac{1}{2}(x+\bar{x})=x-\frac{c}{1+c^2}(\cos\omega X^{(1)}+\sin\omega X^{(2)}). \tag{18}$$

$\mathfrak{x}^{(3)}$ ist die Strahlrichtung. Unter Berücksichtigung von (7) erkennt man, daß $\mathfrak{x}^{(1)}$ und $\mathfrak{x}^{(2)}$ die Winkel zwischen den Normalenrichtungen $X^{(3)}$ und $\bar{X}^{(3)}$ halbieren, also den beiden die Winkel der Brennebenen halbierenden Ebenen angehören. Für das Dreikant $(\mathfrak{x}^{(1)},\ldots)$ erhält man die Differentialrelationen:

$$\begin{cases}\mathfrak{x}_\alpha^{(1)}=-m\,\mathfrak{x}^{(2)}-\sqrt{e}\,\mathfrak{x}^{(3)}, & \mathfrak{x}_\beta^{(1)}=n\,\mathfrak{x}^{(2)},\\ \mathfrak{x}_\alpha^{(2)}=m\,\mathfrak{x}^{(1)}, & \mathfrak{x}_\beta^{(2)}=-n\,\mathfrak{x}^{(1)}-\sqrt{g}\,\mathfrak{x}^{(3)},\\ \mathfrak{x}_\alpha^{(3)}=\sqrt{e}\,\mathfrak{x}^{(1)}, & \mathfrak{x}_\beta^{(3)}=\sqrt{g}\,\mathfrak{x}^{(2)};\end{cases} \tag{19}$$

dabei ist gesetzt:

$$\begin{cases}\sqrt{e}=\sqrt{1+c^2}\sin(\theta-\omega), & \sqrt{g}=\dfrac{\sqrt{1+c^2}}{c}\sin(\theta+\omega),\\ m=\dfrac{(\sqrt{e})_\beta}{\sqrt{g}}=c\cos(\theta-\omega), & n=\dfrac{(\sqrt{g})_\alpha}{\sqrt{e}}=\dfrac{1}{c}\cos(\theta+\omega).\end{cases} \tag{20}$$

Auf der Bildkugel $(\mathfrak{x}^{(3)})$ der Strahlrichtung ist das Kurvennetz (α,β) orthogonal; das Quadrat des sphärischen Linienelements wird:

$$\Sigma(d\mathfrak{x}^{(3)})^2=e\,d\alpha^2+g\,d\beta^2. \tag{21}$$

---

[9]) Die Bestätigung verlangt einen gewissen Aufwand an Rechnung. Sie vereinfacht sich übrigens, wenn man von den Formeln des Art. 4 ausgeht.

[10]) Vgl. dazu § 4 in der in Anm. [3]) zitierten Arbeit.

Aus (20) entnimmt man für die Bildkugel der pseudosphärischen Kongruenz die (im Falle reeller Brennmäntel) charakteristischen Beziehungen:

$$(22) \qquad \frac{e}{1+c^2}+\frac{m^2}{c^2}=1, \qquad \frac{c^2}{1+c^2}g+c^2n^2=1\,.$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung nach β, der zweiten nach α, folgt:

$$m_\beta+\frac{c^2\sqrt{e}\sqrt{g}}{1+c^2}=0, \qquad n_\alpha+\frac{\sqrt{e}\sqrt{g}}{1+c^2}=0.$$

In dieser Weise zerfällt hier also die Gaußsche Relation:

$$m_\beta+n_\alpha+\sqrt{e}\sqrt{g}=0\,.$$

Bildet mán die Ableitungen von (18) mit Benutzung von (2), so ergibt sich:

$$(23) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_\alpha=-\dfrac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta-\omega)\,\mathfrak{x}^{(2)}+c\cos(\theta-\omega)\,\mathfrak{x}^{(3)}=-\dfrac{c^2}{1+c^2}\sqrt{e}\,\mathfrak{x}^{(2)}+m\,\mathfrak{x}^{(3)}\,, \\ \mathfrak{x}_\beta=-\dfrac{1}{c\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta+\omega)\,\mathfrak{x}^{(1)}+\dfrac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\,\mathfrak{x}^{(3)}=-\dfrac{1}{1+c^2}\sqrt{g}\,\mathfrak{x}^{(1)}+n\,\mathfrak{x}^{(3)}\,. \end{cases}$$

Man denke sich jetzt bei gegebener Bildkugel $(\mathfrak{x}^{(3)})$ die pseudosphärische Kongruenz auf die *Mittelfläche* $(\mathfrak{x})$ bezogen, deren Bestimmung nach (23) drei Quadraturen erfordert. Die Brennflächen sind dann:

$$(24) \qquad x=\mathfrak{x}+\frac{c}{1+c^2}\mathfrak{x}^{(3)}, \qquad \bar{x}=\mathfrak{x}-\frac{c}{1+c^2}\mathfrak{x}^{(3)}\,.$$

Wir betrachten die *Kongruenz, die der vom Mittelpunkt* $\mathfrak{x}$ *ausgehende Querstrahl mit der Richtung* $\mathfrak{x}^{(1)}$ *durchläuft,* und machen den für einen jeden ihrer beiden Brennmäntel gültigen Ansatz:

$$(25) \qquad \hat{x}=\mathfrak{x}+t\,\mathfrak{x}^{(1)}\,.$$

Durch Differentiation erhalten wir zunächst noch allgemein:

$$(26) \quad \begin{cases} \hat{x}_\alpha=t_\alpha\,\mathfrak{x}^{(1)}+\left[-tc\cos(\theta-\omega)-\dfrac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta-\omega)\right]\mathfrak{x}^{(2)} \\ \qquad\qquad +\left[c\cos(\theta-\omega)-t\sqrt{1+c^2}\sin(\theta-\omega)\right]\mathfrak{x}^{(3)}\,, \\ \hat{x}_\beta=\left[t_\beta-\dfrac{1}{c\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta+\omega)\right]\mathfrak{x}^{(1)}+\dfrac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\left[t\,\mathfrak{x}^{(2)}+\mathfrak{x}^{(3)}\right]. \end{cases}$$

Für $(\hat{x})$ als Brennfläche hat der Normalenvektor $\hat{\xi}$ (Richtungskosinus proportional mit $\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\zeta}$), da er zugleich zu $\mathfrak{x}^{(1)}$ und zu $\hat{x}_\beta$ senkrecht sein muß, jedenfalls die Form:

$$(27) \qquad \hat{\xi}=\mathfrak{x}^{(2)}-t\,\mathfrak{x}^{(3)};$$

aus $\Sigma\,\hat{x}_\alpha\hat{\xi}=0$ folgt dann für t die quadratische Gleichung:

$$(28) \qquad t^2-\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg}(\theta-\omega)\cdot t-\frac{c^2}{1+c^2}=0,$$

deren Lösungen

$$(29) \qquad t=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}, \qquad t'=-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{tg}\frac{\theta-\omega}{2}$$

sind. Das Produkt der vom Punkte $\mathfrak{x}$ aus gerechneten Brennpunktsabszissen ist demnach

konstant:

$$tt' = -\frac{c^2}{1+c^2}. \tag{30}$$

Wir bilden $\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta$ mittels (19), (29), (1) und finden für beide Werte von t:

$$\Sigma\, \hat{x}_\alpha \hat{\xi}_\alpha = 0, \qquad \Sigma\, \hat{x}_\beta \hat{\xi}_\beta = 0.$$

Mithin sind die Kurven (α, β) auf den Brennmänteln $(\hat{x})$, $(\hat{x}')$ die Asymptotenlinien; die Kongruenz ist also ein W-System. Die von dem zweiten Querstrahl mit der Richtung $\mathfrak{x}^{(2)}$ durchlaufene Kongruenz hat dieselbe Eigenschaft; als Brennpunktsabszissen erhält man:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} \frac{\theta+\omega}{2}, \qquad \tau' = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{tg} \frac{\theta+\omega}{2}, \qquad \tau\tau' = -\frac{1}{1+c^2}. \tag{31}$$

Satz I ist damit bestätigt.

4. *Transformation der Mittelfläche und des Hilfsdreikants.* — Auch für die in Art. 2 gewonnene, durch den Index 1 gekennzeichnete transformierte pseudosphärische Kongruenz führen wir jetzt die Mittelfläche $(\mathfrak{x}_1)$ und das aus dem Strahl und den beiden Querstrahlen bestehende Hilfsdreikant $(\mathfrak{x}_1^{(1)}, \mathfrak{x}_1^{(2)}, \mathfrak{x}_1^{(3)})$ ein. In Übereinstimmung mit (17) und (24) gelten dann die Beziehungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1^{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(-\sin\omega_1 X_1^{(1)} + \cos\omega_1 X_1^{(2)} + c X_1^{(3)}\right), \\ \mathfrak{x}_1^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(c\sin\omega_1 X_1^{(1)} - c\cos\omega_1 X_1^{(2)} + X_1^{(3)}\right), \\ \mathfrak{x}_1^{(3)} = \cos\omega_1 X_1^{(1)} + \sin\omega_1 X_1^{(2)}, \end{cases} \tag{32}$$

$$x_1 = \mathfrak{x}_1 + \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{x}_1^{(3)}, \qquad \bar{x}_1 = \mathfrak{x}_1 - \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{x}_1^{(3)}. \tag{33}$$

Um den direkten Übergang von $(\mathfrak{x}^{(1)}, \cdots)$, $(\mathfrak{x})$ zu $(\mathfrak{x}_1^{(1)}, \cdots)$, $(\mathfrak{x}_1)$ herzustellen, bedienen wir uns des Ansatzes:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1^{(1)} = \alpha_1 \mathfrak{x}^{(1)} + \beta_1 \mathfrak{x}^{(2)} + \gamma_1 \mathfrak{x}^{(3)}, \qquad \mathfrak{x}_1^{(2)} = \alpha_2 \mathfrak{x}^{(1)} + \beta_2 \mathfrak{x}^{(2)} + \gamma_2 \mathfrak{x}^{(3)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{x}_1^{(3)} = \alpha_3 \mathfrak{x}^{(1)} + \beta_3 \mathfrak{x}^{(2)} + \gamma_3 \mathfrak{x}^{(3)}, \end{cases} \tag{34}$$

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{x}^{(1)} + \mu \mathfrak{x}^{(2)} + \nu \mathfrak{x}^{(3)}. \tag{35}$$

Bei der Bestimmung der Koeffizienten von (34) bedarf es gewisser Umformungen, damit die Ausdrücke eine brauchbare Gestalt annehmen. Am Beispiel von α_2 werde der Gang der Rechnung dargelegt. Nach (17), (32), (11) wird:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \Sigma\, \mathfrak{x}_1^{(1)} \mathfrak{x}^{(2)} = \frac{1}{1+c^2} \{ & c\sin\omega_1 (-\sin\omega \cdot \alpha_{11} + \cos\omega \cdot \alpha_{12} + c\alpha_{13}) \\ & - c\sin\omega_1 (-\sin\omega \cdot \alpha_{21} + \cos\omega \cdot \alpha_{22} + c\alpha_{23}) \\ & - \sin\omega \cdot \alpha_{31} + \cos\omega \cdot \alpha_{32} + c\alpha_{33}\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (12) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \frac{1}{1+c^2} \{ & c\sin(\omega_1 - \theta)\sin(\theta_1 - \omega) + c\sin\sigma\cos(\omega_1 - \theta)\cos(\theta_1 - \omega) \\ & + c^2\cos\sigma\cos(\omega_1 - \theta) + \cos\sigma\cos(\theta_1 - \omega) - c\sin\sigma\}, \end{aligned}$$

und wenn zur Vereinfachung

$$(36)\qquad \frac{1}{2}(\theta_1 - \omega + \omega_1 - \theta) = U, \qquad \frac{1}{2}(\theta_1 - \omega - \omega_1 + \theta) = V$$

gesetzt wird:

$$\alpha_2 = \frac{1}{1+c^2}\Big\{c(1-\sin\sigma)\frac{1}{2}(1-\cos 2U) - c(1+\sin\sigma)\frac{1}{2}(1-\cos 2V) + c^2\cos\sigma\cos(U-V) + \cos\sigma\cos(U+V)\Big\}.$$

Wir benutzen noch (9), sowie die fundamentale Relation des Vertauschbarkeitssatzes in der Form (15):

$$(37)\qquad \sin V = k\sin U,$$

und finden schließlich:

$$\alpha_2 = \frac{2kc}{c^2+k^2}\cos U\cos V.$$

Die auf diesem Wege erhaltenen Koeffizienten der Drehungsformeln (34) sind:

$$(38)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{c^2+k^2}[-c^2+k^2-2k^2\sin^2 U], & \beta_2 = \dfrac{1}{c^2+k^2}[-c^2+k^2-2k^2c^2\sin^2 U], \\ \gamma_3 = \dfrac{1}{c^2+k^2}[c^2+k^2-2k^2(1+c^2)\sin^2 U); & \alpha_2 = -\beta_1 = \dfrac{2kc}{c^2+k^2}\cos U\cos V, \\ \alpha_3 = -\gamma_1 = \dfrac{2k^2\sqrt{1+c^2}}{c^2+k^2}\sin U\cos U, & \beta_3 = \gamma_2 = -\dfrac{2kc\sqrt{1+c^2}}{c^2+k^2}\sin U\cos V. \end{cases}$$

Um die Koeffizienten λ, μ, ν der Translation (35), relative Koordinaten des neuen Strahlmittelpunkts $\mathfrak{x}_1$ im bewegten System $(\mathfrak{X}^{(1)}, \cdots)$, $\mathfrak{x}$, darzustellen, gehen wir von der folgenden vektoriellen Beziehung aus, deren beide Seiten in doppelter Weise den Zusammenhang der pseudosphärischen Flächen (x) und (x_1) ausdrücken:

$$\lambda\mathfrak{X}^{(1)} + \mu\mathfrak{X}^{(2)} + \nu\mathfrak{X}^{(3)} + \frac{c}{1+c^2}(\alpha_3\mathfrak{X}^{(1)} + \beta_3\mathfrak{X}^{(2)} + \gamma_3\mathfrak{X}^{(3)}) - \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}^{(3)} = \cos\sigma(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)}).$$

Die rechte Seite geht infolge von (17) über in:

$$\cos\sigma\left[\frac{\sin(\theta_1-\omega)}{1+c^2}(\mathfrak{X}^{(1)} - c\mathfrak{X}^{(2)}) + \cos(\theta_1-\omega)\mathfrak{X}^{(3)}\right].$$

Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich, wenn außerdem berücksichtigt wird, daß $\theta_1 - \omega = U + V$ ist:

$$\lambda + \frac{c\alpha_3}{1+c^2} = \frac{\cos\sigma}{\sqrt{1+c^2}}\sin(U+V), \qquad \mu + \frac{c\beta_3}{1+c^2} = -\frac{c\cos\sigma}{\sqrt{1+c^2}}\sin(U+V),$$

$$\nu + \frac{c(\gamma_3-1)}{1+c^2} = \cos\sigma\cos(U+V),$$

und hieraus mit Hilfe von (38) und (9):

$$(39)\qquad \lambda = -\frac{\beta_3}{1+c^2}, \quad \mu = -\frac{c^2\alpha_3}{1+c^2}, \quad \nu = \alpha_2.$$

Wir sind damit im Besitz der zum Beweise des Satzes II erforderlichen Formeln. Beiläufig wollen wir aber das Koeffizientensystem (38) noch in einer zweiten Gestalt

angeben, die erkennen läßt, daß eine Ribaucour-Transformation der sphärischen Abbildung vorliegt. Es werde gesetzt:

$$(40) \qquad u = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} U, \qquad v = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} V .$$

An die Stelle von (37) tritt die u und v verbindende quadratische Relation:

$$(41) \qquad c^2 u^2 - k^2 v^2 = \frac{c^2 (k^2 - 1)}{1 + c^2} .$$

Die Ausdrücke (38) verwandeln sich in:

$$(42) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{H}(u^2 - v^2 - 1), \quad \beta_2 = \dfrac{1}{H}(u^2 - v^2 + 1), \quad \gamma_3 = \dfrac{1}{H}(u^2 + v^2 - 1), \\ \alpha_2 = -\beta_1 = -\dfrac{2uv}{H}, \quad \alpha_3 = -\gamma_1 = -\dfrac{2u}{H}, \quad \beta_3 = \gamma_2 = -\dfrac{2v}{H}, \\ H = u^2 + v^2 + 1 . \end{cases}$$

Schreibt man (34), (42) in der Form:

$$(43) \quad \begin{cases} -\mathfrak{x}_1^{(1)} = \mathfrak{x}^{(1)} - \dfrac{2u}{H}\xi, \quad \mathfrak{x}_1^{(2)} = \mathfrak{x}^{(2)} - \dfrac{2v}{H}\xi, \quad \mathfrak{x}_1^{(3)} = \mathfrak{x}^{(3)} - \dfrac{2}{H}\xi , \\ \xi = u\mathfrak{x}^{(1)} + v\mathfrak{x}^{(2)} + \mathfrak{x}^{(3)} , \end{cases}$$

so ist klar, daß die beiden Dreikante $(\mathfrak{x}^{(1)}, \cdots)$ und $(\mathfrak{x}_1^{(1)}, \cdots)$ bei gemeinsamem Scheitel, abgesehen von der durch den Wert $+1$ der Substitutionsdeterminante bedingten Änderung des Richtungssinns bei einer Achse, spiegelbildlich bezüglich der zu ξ normalen Ebene liegen. Diese ist, wie man unschwer feststellt, Tangentialebene des auf die Achsen $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \mathfrak{x}^{(3)}$ bezogenen Kegels:

$$(44) \qquad \frac{x_0^2}{c^2} - \frac{y_0^2}{k^2} - \frac{(1+c^2)\, z_0^2}{c^2 (k^2 - 1)} = 0.$$

Die nachträgliche Verschiebung λ, μ, ν des Scheitels von $(\mathfrak{x}_1^{(1)}, \cdots)$ fällt in die Tangentialebene und steht senkrecht auf der Erzeugenden, in der sie den Kegel berührt. Ort des Strahlmittelpunktes $\mathfrak{x}_1$ der transformierten pseudosphärischen Kongruenz im bewegten System $(\mathfrak{x}^{(1)}, \cdots)$, $\mathfrak{x}$ ist eine Raumkurve vierter Ordnung zweiter Spezies. Die rationale Darstellung der Koordinaten λ, μ, ν ergibt sich, wenn man, an (41) anknüpfend, die Größe

$$(45) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c(k+1)}(cu + kv)$$

als Parameter einführt.

Die Formeln (34), (42) hätten als allgemeiner Ansatz für eine Ribaucour-Transformation der auf das Orthogonalnetz (α, β) bezogenen Einheitskugel $(\mathfrak{x}^{(3)})$ an den Anfang der ganzen Entwicklung gestellt werden können. Sie lassen sich andrerseits, einschließlich der quadratischen Relation (41), auch gewinnen, wenn man von der einparametrigen Bewegung ausgeht, die das windschiefe Gelenkviereck der Punkte x, x_1, $\bar{x}_1$, $\bar{x}$ bei festgehaltener Seite $x\bar{x}$ erfährt, wobei zu beachten ist, daß infolge der Konstanz des Winkels der Brennebenen die Strahlen xx_1 und $\bar{x}\bar{x}_1$ in festen Ebenen bleiben [11]).

[11]) Die kinematische Erzeugung der von $\mathfrak{x}_1$ durchlaufenen rationalen Raumkurve vierter Ordnung erscheint als räumliche Verallgemeinerung einer bekannten Erzeugung der zentrischen Fußpunktkurven der Mittelpunktskegelschnitte.

Es genügt dann noch zum Ausdruck zu bringen, daß auch auf der transformierten Bildkugel $(\mathfrak{x}^{(3)})$ ein Orthogonalnetz (α, β) entsteht. Man erhält so zunächst [s. (20)] die Differentialgleichungen:

$$v_\alpha + u(\sqrt{e}\,v - m) = 0, \qquad u_\beta + v(\sqrt{g}\,u - n) = 0\,,$$

die im Verein mit (41) der totalen Differentialgleichung (8) äquivalent sind. Die Bedingungen (22) erweisen sich für die neue Bildkugel $(\mathfrak{x}^{(3)})$ bei Bestehen von (41) bereits als erfüllt. Erwähnt sei noch, daß die so erhaltene Ribaucour-Transformation unmittelbar auch auf diejenigen Flächen angewendet werden kann, die das Orthogonalnetz (α, β) der Einheitskugel $(\mathfrak{x}^{(3)})$ zum Gaußschen sphärischen Bild ihrer Krümmungslinien zulassen. Zu einer solchen Fläche gehört ein Paar Voßscher Flächen, Enveloppen der durch ihre Normale gelegten Parallelebenen zu den Tangentialebenen der pseudosphärischen Fläche (x) und $(\bar{x})$. In ihren Krümmungsmittelpunkten treffen sich paarweise (harmonische Beziehung) korrespondierende Tangenten der die Voßschen Flächen bedeckenden und dort konjugierte Netze bildenden geodätischen Linien (α, β).

5. *Beweis des Satzes* II. — Auf Grund der getroffenen Vorbereitungen läßt sich der letzte Teil der Untersuchung leicht erledigen. Wir beschränken uns dabei auf die W-Kongruenz der Querstrahlen $\mathfrak{x}^{(1)}$, bzw. $\mathfrak{x}_1^{(1)}$ im transformierten System. Nach (25), (27), (29) haben wir für die Brennmäntel und deren Normalenvektoren die folgenden Formeln, in denen wieder die beiden Werte von t bzw. von t_1 mit t, t' und t_1, t_1' bezeichnet sind:

$$(46)\quad \hat{x} = x + t\,\mathfrak{x}^{(1)}, \quad \hat{\xi} = \mathfrak{x}^{(2)} - t\,\mathfrak{x}^{(3)}; \quad t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \omega}{2}, \qquad t' = -\frac{c^2}{(1+c^2)\,t}\,,$$

$$(47)\quad \hat{x}_1 = x_1 + t_1 \mathfrak{x}_1^{(1)}, \quad \hat{\xi}_1 = \mathfrak{x}_1^{(2)} - t_1 \mathfrak{x}_1^{(3)}; \quad t_1 = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} \frac{\theta_1 - \omega_1}{2}, \quad t_1' = -\frac{c^2}{(1+c^2)t_1}\,.$$

Da die Korrespondenz der Asymptotenlinien schon festeht, handelt es sich nur noch darum, zu zeigen, daß die Verbindungslinie der Punkte $\hat{x}$ und $\hat{x}_1$ gemeinsame Tangente der Flächen $(\hat{x})$ und $(\hat{x}_1)$ ist. Wir finden:

$$(48)\quad \hat{x}_1 - \hat{x} = \lambda \mathfrak{x}^{(1)} + \mu \mathfrak{x}^{(2)} + \nu \mathfrak{x}^{(3)} + t_1 (\alpha_1 \mathfrak{x}^{(1)} + \beta_1 \mathfrak{x}^{(2)} + \gamma_1 \mathfrak{x}^{(3)}) - t \mathfrak{x}^{(1)}$$

und setzen:

$$(49)\qquad \Sigma (\hat{x}_1 - \hat{x})\,\hat{\xi} = A, \qquad \Sigma (\hat{x}_1 - \hat{x})\,\hat{\xi}_1 = B\,,$$

haben also $A = 0$ und $B = 0$ zu bestätigen. Aus (46)—(48) und (34) folgt aber:

$$A = \mu - \nu t + t_1 \beta_1 - t t_1 \gamma_1\,,$$
$$B = \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 - t_1 (\lambda \alpha_3 + \mu \beta_3 + \nu \gamma_3) - t \alpha_2 + t t_1 \alpha_3.$$

Mit Hilfe von (39) gehen, wenn noch berücksichtigt wird, daß $\beta_1 = -\alpha_2$, $\gamma_2 = \beta_3$, $\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \gamma_1 = -\alpha_3$, $\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2 = -\beta_1 = \alpha_2$ ist, A und B in einunddenselben Ausdruck:

$$(50)\qquad A = B = \left(t t_1 - \frac{c^2}{1+c^2}\right) \alpha_3 - (t + t_1)\,\alpha_2$$

über. Wir bilden, indem wir auf (36) Bezug nehmen:

$$(51)\quad \frac{t t_1 - \dfrac{c^2}{1+c^2}}{t + t_1} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \frac{\operatorname{ctg} \dfrac{\theta - \omega}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{\theta_1 - \omega_1}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \dfrac{\theta - \omega}{2} + \operatorname{ctg} \dfrac{\theta_1 - \omega_1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} V,$$

und bemerken, daß (51) auch erfüllt ist, wenn gleichzeitig t durch t' und t_1 durch t_1' ersetzt wird. Andrerseits ergibt sich aus (38) und (37):

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg} V . \tag{52}$$

Aus (50)—(52) schließt man, daß in der Tat $A = B = 0$ ist, und zwar für beide Wertepaare t, t_1 und t', t_1'.

Eingegangen 2. November 1935.

Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II.

Von *G. Haenzel* in Karlsruhe.

Inhalt.

Seite
I. Die Regelscharen dritter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz 169
II. Die Regelscharen vierter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz 171
III. Ringsysteme und Ketten von Regelscharen zweiter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz 175
IV. Konjugierte Richtungen und Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles 177

Die erste Abhandlung [1]) behandelte die automorphen Kollineationen, die Involutionen und die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz, danach allgemeine Theoreme über die in der linearen Kongruenz mit ihren Regelscharen enthaltenen Regelflächen und insbesondere die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser Flächen. Im Anschluß hieran ergab sich eine neuartige Bedeutung der Differentialgleichung erster Ordnung für die Geometrie der linearen Kongruenz mit zahlreichen neuen geometrischen Theoremen. Eine sich hieran anschließende Abhandlung über die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes [1]) beschäftigte sich in entsprechender Weise mit der Geometrie dieses Gebildes. Die jetzt vorliegende Arbeit setzt jene Untersuchungen fort. Der erste und zweite Abschnitt bringen eine kurze Theorie der Regelscharen dritter und vierter Ordnung in der linearen Kongruenz auf Grund der früheren Ergebnisse. Der dritte behandelt die hier sogenannten Ringsysteme und Ketten von Regelscharen zweiter Ordnung mit merkwürdigen neuen Sätzen. Im vierten Abschnitt erscheinen die neuen Begriffe der konjugierten Richtungen und der Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles. Ihre Einführung ermöglicht es geradezu, bestimmte Methoden und Ergebnisse der Theorie analytischer Funktionen für die Erforschung der Geometrie der linearen Kongruenz dienstbar zu machen, wodurch neue Ergebnisse gewonnen werden.

Die Darstellung der linearen Strahlenkongruenz als Schnitt zweier Strahlenkomplexe gestattet die Elimination zweier Linienkoordinaten aus der quadratischen Plückerschen Grundgleichung und die Behandlung der hyperbolischen, der elliptischen und der parabolischen linearen Kongruenz als Strahlenfläche, als strahlenlose Fläche und als Kegel zweiten Grades. Eine anschließende stereographische Projektion dieser Flächen bildet die drei Arten der linearen Kongruenz auf die Ebene mit zwei reellen, mit zwei konjugiert imaginären und mit zwei vereinigten Fundamentalpunkten ab. Von diesem Hilfsmittel wird hier, wie früher, häufig Gebrauch gemacht.

I. Die Regelscharen dritter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 auf die Ebene mit zwei Fundamentalpunkten L, R stellt eine Regelschar dritter Ordnung $\mathfrak{R}^3$ der Kongruenz

[1]) Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **173** (1935), S. 91—113. — Haenzel, Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **174** (1936), S. 226—236.

als ebene Kurve dritter Ordnung r^3 dar mit einem Doppelpunkte in dem einen Fundamentalpunkte R und einem einfachen Punkte in dem anderen L (Fig. 1) [2]). Die Punkte L, R sind stets reell; sie können zusammenfallen, so daß die Fundamentalgerade der Bildebene die rationale Bildkurve r^3 in ihrem Doppelpunkte berührt.

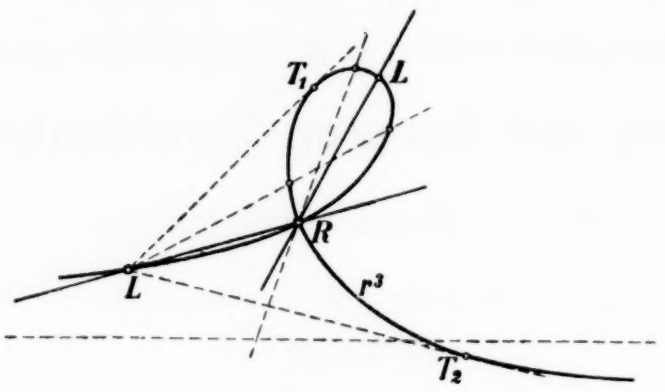


Fig. 1.

Eine rationale ebene Kurve dritter Ordnung ist von vierter Klasse und hat einen Doppelpunkt oder eine Spitze oder einen isolierten Punkt. Im ersten und zweiten Falle besitzt sie einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Wendepunkte, im letzten drei reelle Wendepunkte. Hieraus ist zu ersehen [1]):

Die Regelfläche dritten Grades R^3 besitzt eine doppelte Leitgerade und eine zu ihr windschiefe einfache Leitgerade, die sich auch vereinigen können. Ihre Regelschar $\mathfrak{R}^3$ liegt in einer hyperbolischen oder in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz. Jede Regelfläche dritten Grades ist rational und vom Rang vier. Sie besitzt drei Wenderegelstrahlen, deren oskulierende Regelflächen zweiten Grades Strahlenparaboloide sind.

In der elliptischen linearen Strahlenkongruenz sind keine reellen Regelscharen dritter Ordnung enthalten. In der hyperbolischen linearen Kongruenz liegen zwei Typen von Regelscharen dritter Ordnung.

2. Der Doppelpunkt R einer rationalen ebenen Kurve r^3 in der Bildebene trennt die Schleife der Kurve von der übrigen Kurve. Jede Gerade durch einen gegebenen Punkt X der Schleife schneidet die Kurve in zwei weiteren reellen Punkten, und aus X lassen sich zwei konjugiert imaginäre Tangenten an die Kurve legen. Aus einem Kurvenpunkte X' des übrigen Kurventeiles führen außer der Geraden $X'R$ und der Tangente in X' noch zwei weitere reelle Tangenten an die Kurve. Der Strahlenbüschel X' wird durch diese Tangenten in zwei Teile zerlegt, die Strahlen des einen Teiles enthalten außer X' zwei reelle Kurvenpunkte, die Strahlen des anderen zwei konjugiert imaginäre.

Der eine Fundamentalpunkt der Bildebene ist der Doppelpunkt R. Liegt der zweite Fundamentalpunkt L nicht auf dem Schleifenteile der Bildkurve, so gehen (Fig. 1) aus L noch zwei reelle einfache Tangenten an die Kurve. Ihre Berührungspunkte T_1, T_2 stellen zwei reelle Torsalstrahlen t_1, t_2 dar [3]), die beiden reellen Torsalpunkte liegen auf der doppelten Leitgeraden, und die beiden reellen Torsalebenen τ_1, τ_2 gehen durch die einfache Leitgerade. Die beiden Torsalpunkte begrenzen auf der doppelten Leitgeraden eine Strecke; durch jeden inneren Punkt der Strecke gehen zwei reelle Regelstrahlen, durch jeden äußeren Punkt zwei konjugiert imaginäre Regelstrahlen oder umgekehrt.

Liegt dagegen der zweite Fundamentalpunkt L auf dem Schleifenteile (Fig. 1), so schneidet jede Gerade durch L noch in zwei weiteren Kurvenpunkten. Die Geraden

---

[2]) Haenzel, a. a. O. [1]), S. 94.

[3]) Haenzel, a. a. O. [1]) S. 106.

durch L stellen aber die Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung dar, deren Mittelpunkte auf der doppelten Leitgeraden l liegen und deren Ebenen durch die einfache Leitgerade r gehen. Durch jeden Punkt von l gehen in diesem Falle zwei reelle Regelstrahlen der Fläche dritten Grades, und in jeder Ebene durch r liegen zwei reelle Regelstrahlen. Die Regelfläche besitzt zwei konjugiert imaginäre windschiefe Torsalstrahlen und keine reellen. Die beiden konjugiert imaginären Torsalpunkte liegen auf der doppelten Leitgeraden und die beiden konjugiert imaginären Torsalebenen gehen durch die einfache Leitgerade.

Die doppelt berührenden Ebenen einer Regelfläche bilden ihre Doppeltorse. Die Doppeltorse der Regelfläche dritten Grades besteht in beiden Fällen aus dem Ebenenbüschel mit der Achse r. Insgesamt gilt der Satz:

Die Regelfläche dritten Grades vom Typus I hat zwei reelle windschiefe Torsalstrahlen, die Regelfläche dritten Grades vom Typus II hat zwei konjugiert imaginäre windschiefe Torsalstrahlen, daher auch konjugiert imaginäre Torsalpunkte und Torsalebenen. Die Doppelkurve der Regelfläche besteht in beiden Fällen aus einer reellen doppelten Leitgeraden, die Doppeltorse aus einem reellen Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Achse einfache Leitgerade ist. Die Regelscharen dieser Flächen kommen nur in der hyperbolischen linearen Kongruenz vor.

Die gegebene Tangentialebene σ der Regelfläche dritten Gerades schneidet die Fläche in einem Regelstrahle und in einem mit der doppelten Leitgeraden inzidenten Kegelschnitt s^2. Die beiden durch die einfache Leitgerade gehenden Torsalebenen müssen aber jede Kurve der Fläche und somit den Kegelschnitt s^2 berühren. Deshalb gilt:

Auf einer Regelfläche dritten Grades vom Typus I schneidet die einfache Leitgerade jede Tangentialebene außerhalb des in der Tangentialebene gelegenen Kegelschnittes; bei einer solchen vom Typus II schneidet sie jede Tangentialebene innerhalb dieses Kegelschnittes.

3. Der dritte Typus der Regelfläche dritten Grades ist die Cayleysche Fläche [4]). Sie liegt mit ihrer Regelschar in einer parabolischen linearen Kongruenz. Ihre beiden vereinigten Torsalstrahlen sind mit den vereinigten Leitgeraden der Kongruenz zusammengefallen. Wir brauchen auf diese Regelfläche dritten Grades vom Typus III nicht weiter einzugehen.

Jeder der drei Typen ist gegen reelle Kollineationen invariant.

Ein mit den Fundamentalpunkten R, L inzidenter, oskulierender Kegelschnitt einer rationalen ebenen Kurve enthält keine weiteren Kurvenpunkte. Daraus folgt:

Ein gegebenes oskulierendes Hyperboloid der Regelfläche dritten Grades enthält außer dem oskulierenden Regelstrahl nur die beiden Leitgeraden der Fläche.

II. Die Regelscharen vierter Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz.

4. Eine gegebene Regelschar n-ter Ordnung in der linearen Kongruenz hat die deren eine Leitgerade zum α-fachen Leitstrahl, die andere zum β-fachen, und es ist $\alpha + \beta = n$. Für $\alpha = \beta$ läßt sich die Regelschar n-ter Ordnung als vollständiger Schnitt der linearen Kongruenz mit einem Strahlenkomplexe vom Grade $\frac{n}{2}$ darstellen [5]). Für $\alpha \neq \beta$ kann die Regelschar durch Hinzufügung von $|\alpha - \beta|$ Kongruenzstrahlenbüscheln erster Ordnung zum vollständigen Schnitt der Kongruenz mit einem Strahlenkomplexe ergänzt werden, dessen Grad die größere der Zahlen α, β ist.

---

[4]) Zuerst entdeckt von M. Chasles, Comptes Rendus **53** (1861), S. 888, Anm. 1.

[5]) Haenzel, a. a. O.[1]), S. 95.

Infolgedessen teilen sich die Regelscharen vierter Ordnung der linearen Kongruenz vorerst in zwei Arten. Die Regelschar vierter Ordnung *erster Art* hat die beiden Leitgeraden zu doppelten Leitstrahlen. Es ist $\alpha = \beta = 2$. Die Regelschar vierter Ordnung *zweiter Art* hat die eine Leitgerade zum einfachen, die andere zum dreifachen Leitstrahl, $\alpha = 1, \beta = 3$. Die Regelschar vierter Ordnung erster Art ist der vollständige Schnitt der linearen Kongruenz mit einem quadratischen Strahlenkomplexe, und durch sie gehen unendlich viele quadratische Strahlenkomplexe [5]). Die Regelschar vierter Ordnung zweiter Art ist der Teilschnitt der hyperbolischen linearen Kongruenz mit einem kubischen Strahlenkomplexe, der außerdem noch zwei Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung enthält. Die Punkte der einen Leitgeraden sind dreifache, die der anderen einfache Punkte. Der Leser erkennt, daß die Bezeichnungen in Anlehnung an die Theorie der biquadratischen Raumkurven gewählt sind:

Die biquadratische Raumkurve erster Art ist die Schnittkurve von ∞^1 Flächen zweiten Grades; hat dagegen eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades R^2 mit einer Regelfläche dritten Grades R^3 zwei Regelstrahlen gemein, so durchdringen sie einander noch in einer biquadratischen Raumkurve zweiter Art k^4. Die Leitstrahlen von R^2 sind Trisekanten, die Regelstrahlen von R^2 Unisekanten von k^4. Durch die Raumkurve geht keine einzige weitere Fläche zweiten Grades.

5. Die Regelflächen vierten Grades erster Art. Wird die Regelschar vierter Ordnung erster Art als Schnitt der (hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen) linearen Kongruenz mit einem biquadratischen Strahlenkomplexe erzeugt und die Kongruenz als Fläche zweiten Grades gedeutet, so stellt sich die Regelschar vierter Ordnung erster Art auf ihr als biquadratische Raumkurve erster Art dar. Die stereographische Projektion der Fläche zweiten Grades verwandelt dann die Regelschar vierter Ordnung in eine ebene bizirkulare Kurve vierter Ordnung — bizirkular im Sinne der durch die beiden Fundamentalpunkte L, R in der Bildebene bedingten Metrik.

Setzen wir als Fläche zweiten Grades vorübergehend eine Kugel, was den Realitätsverhältnissen der elliptischen linearen Kongruenz entspricht. Durch die Raumkurve vierter Ordnung erster Art gehen vier Kegel zweiten Grades K_1^2, K_2^2, K_3^2, K_4^2. Ihre Mittelpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 sind die Eckpunkte des gemeinsamen Polartetraeders aller ∞^1 durch die Raumkurve gehenden Flächen zweiten Grades. Einen der vier Kegel K_i^2 greifen wir heraus. Seine Tangentialebenen schneiden die Kugel in ∞^1 Kreisen. Die Kreise umhüllen die Raumkurve vierter Ordnung erster Art, jeder von ihnen berührt sie in zwei Punkten. Auch schneiden alle diese Kreise den Berührungskreis b_i^2 des Kegels K_i^2 auf der Kugel senkrecht [6]). Das gleiche gilt für die übrigen drei Kegel. Die vier Berührungskreise b_i^2 sind die Schnittkreise der Kugel mit den vier Ebenen des Polartetraeders $P_1P_2P_3P_4$, erfüllen also gegenseitig die Orthogonalitätsbedingung. Durch stereographische Projektion ergibt sich daraus folgendes Theorem:

Die bizirkulare ebene Kurve vierter Ordnung ist Hüllkurve von ∞^1 Orthogonalkreisen eines festen Kreises b_1^2. Die Kurve berührt jeden Hüllkreis in zwei für b_1^2 inversen Punkten, ist also für b_1^2 selbstinvers. In der gleichen Beziehung steht die Kurve zu drei weiteren Kreisen b_2^2, b_3^2, b_4^2. Die vier Inversionskreise b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 sind je zueinander orthogonal. Die ∞^1 Mittelpunkte einer Schar von Hüllkreisen erfüllen je einen Kegelschnitt, den Deferenten. Durch einen Inversionskreis und den zugehörigen Defe-

---

[6]) Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, S. 31.

renten ist die bizirkulare Kurve als Hüllkurve bestimmt, und es lassen sich die drei übrigen Inversionskreise nebst Deferenten angeben.

Setzen wir für die Kugel eine Strahlenfläche zweiten Grades, was den Realitätsverhältnissen der hyperbolischen linearen Kongruenz entspricht, so führt die stereographische Projektion auf die gleichen Ergebnisse, wenn die Begriffe Kreis, Inversion, bizirkular und orthogonal auf die durch zwei reelle Fundamentalpunkte bedingte Metrik der Bildebene bezogen werden. Erinnern wir uns daran [1]), daß der Kreis der Ebene die Regelschar zweiter Ordnung der linearen Kongruenz wiedergibt, die Orthogonalität zweier Kreise die Polarinvarianz der Regelscharen, so gilt:

Eine mit ihrer Regelschar in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art R^4 *ist polarinvariant für vier einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades* R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_4^2. *Jede dieser Regelflächen ist für die übrigen polarinvariant. Die Regelfläche vierten Grades erster Art* R^4 *ist Hüllfläche von vier Systemen einscharig in der Kongruenz enthaltener Regelflächen zweiten Grades. Diese sind je für eine der vier Flächen* R_i^2 *polarinvariant.*

Die Mittelpunkte der ∞^3 einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades erfüllen die Fluchtebene μ der Kongruenz. Ein gegebener Punkt M der Fluchtebene ist der Mittelpunkt von ∞^1 solchen konzentrischen Flächen zweiten Grades. Der durch M gehende Kongruenzstrahl ist der einzige in der Kongruenz enthaltene Durchmesser dieser Flächen. Eine gegebene einscharig in der Kongruenz enthaltene Mittelpunktsfläche zweiten Grades besitzt einen Durchmesser, der Kongruenzstrahl ist. Sie ordnet ihm den unendlichfernen Kongruenzstrahl als reziproke Polare zu.

Wird bei der Abbildung der linearen Kongruenz auf die Ebene der unendlichferne Kongruenzstrahl in das unendlichferne Element der Ebene überführt, so stellt der Mittelpunkt eines Bildkreises den in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der entsprechenden Regelfläche zweiten Grades dar; zwei für die Regelfläche zweiten Grades reziprok polare Kongruenzstrahlen sind auf zwei inverse Punkte des Bildkreises abgebildet.

Die bizirkulare ebene Kurve vierter Ordnung umhüllt vier Systeme von Kreisen. Die ∞^1 Kreise je eines Systems sind Orthogonalkreise je einer Inversion, und ihre Mittelpunkte erfüllen je einen Kegelschnitt, den Deferenten. Ein gegebener Kegelschnitt, der nicht durch die Fundamentalpunkte geht, stellt aber eine Regelschar vierter Ordnung erster Art dar [7]). Aus alledem folgt:

Die in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art umhüllt vier Systeme von Regelflächen zweiten Grades. Die ∞^1 *Flächenmittelpunkte der Hüllflächen erfüllen in der Fluchtebene vier ebene Kurven vierter Ordnung (vom Geschlechte* 0 *oder* 1), *ihre in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser erfüllen vier Regelscharen vierter Ordnung erster Art.*

6. Klassifikation der Regelflächen vierten Grades in der linearen Kongruenz. Eine in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades hat die (reellen, vereinigten oder konjugiert imaginären) windschiefen Leitgeraden l, r der Kongruenz zu Leitstrahlen. Aus der Bildkurve der Fläche kann man sofort auf ihre geometrischen Eigenschaften schließen [8]). Es ergeben sich folgende sechs Typen:

---

[7]) Haenzel, a. a. O. [1]) S. 95.

[8]) Haenzel, a. a. O. [1]). Insbesondere Abschnitt III, Differentialgeometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen.

I. Die Regelfläche vierten Grades hat die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Strahlen l, r zu doppelten Leitgeraden. Ihre Doppelkurve besteht aus diesen Geraden, ihre Doppeltorse aus den Ebenenbüscheln erster Ordnung mit den Achsen l, r. Sie kann erzeugt werden durch eine (2, 2)-Verwandtschaft zwischen den Punktreihen l, r oder zwischen den Ebenenbüscheln l, r. Die Bildkurve der Regelschar ist eine ebene bizirkulare Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1, hat neben den Fundamentalpunkten L, R keine anderen Doppelpunkte oder Spitzen, 8 Doppeltangenten und 12 Wendetangenten. Da sie von achter Klasse ist, gehen von den Doppelpunkten L, R außer den Haupttangenten noch je vier einfache Tangenten an die Kurve. Diese beiden Tangentenquadrupel haben gleiches Doppelverhältnis. Auf Grund dieser Eigenschaften der Bildkurve [8]) gilt:

Die Regelfläche vierten Grades vom Typus I hat das Geschlecht 1, *acht Torsalregelstrahlen, zwölf Wenderegelstrahlen, keine doppelten oder Rückkehrregelstrahlen. Ihre acht Torsalebenen gehen je zu vieren durch die beiden doppelten Leitgeraden* l, r *und ihre acht Torsalpunkte liegen je zu vieren auf* l, r. *Diese beiden Würfe von Torsalebenen und von Torsalpunkten haben gleiches Doppelverhältnis.*

Der Typus I enthält zwei Unterarten, denn die doppelten Leitgeraden sind entweder reelle oder konjugiert imaginäre windschiefe Strahlen.

II. Die Regelfläche vierten Grades hat als Doppelkurve eine doppelte Leitgerade $r = l$, längs der die Fläche sich selbst noch berührt. Für die Bildkurve fallen die Fundamentalpunkte R, L zusammen. Die Untersuchung der Bildkurve führt sofort auf den Satz:

Die Regelfläche vierten Grades vom Typus II hat das Geschlecht 1; *sie besitzt vier Torsalstrahlen zweiter Ordnung erster Art, aber keine doppelten Regelstrahlen. Ihre vier Torsalpunkte und vier Torsalebenen sind mit der doppelten Leitgeraden* $r = l$ *inzident, längs der die Fläche sich außerdem selbst berührt. Ihre Doppeltorse ist das doppelte Ebenenbüschel mit der Achse* $r = l$.

Der Typus I kommt in der elliptischen und der hyperbolischen, Typus II nur in der parabolischen linearen Kongruenz vor.

III. Die Regelfläche vierten Grades hat außer den beiden doppelten Leitgeraden r, l einen doppelten Regelstrahl e. Die Bildkurve geht zweimal durch jeden Fundamentalpunkt und besitzt einen dritten Doppelpunkt E, sechs Wendepunkte, vier Doppeltangenten und ist von der sechsten Klasse. Daraus folgt:

Die Regelfläche vierten Grades vom Typus III hat das Geschlecht 0, *zwei windschiefe doppelte Leitgeraden* r, l *und einen doppelten Regelstrahl* e *oder isolierten Regelstrahl oder Rückkehrregelstrahl; im ersten und zweiten Falle sind vier, im dritten Falle zwei Torsalregelstrahlen vorhanden, sowie sechs Wenderegelstrahlen. Die Doppeltorse besteht aus den drei Ebenenbüscheln mit den Achsen* r, l, e.

Es sind zwei Arten dieses Typus zu unterscheiden, je nachdem die Leitgeraden r, l reell oder konjugiert imaginär sind. Der Typus kommt also in der hyperbolischen und der elliptischen linearen Kongruenz vor.

IV. Rücken die doppelten Leitgeraden r, l zusammen, so ergibt sich die Regelfläche vierter Ordnung vom Typus IV. Hier gilt auf Grund entsprechender Überlegungen:

Die Regelfläche vierten Grades vom Typus IV hat das Geschlecht 0. *Ihre Doppelkurve besteht aus der doppelten Leitgeraden* $r = l$, *längs der gleichzeitig Selbstberührung stattfindet, und aus einem Regelstrahl* e, *der Doppelregelstrahl, isolierter Regelstrahl oder Rück-*

kehrregelstrahl sein kann. Im ersten und zweiten Falle sind zwei Torsalregelstrahlen zweiter Ordnung erster Art, im letzten Falle ein solcher Torsalregelstrahl vorhanden. Die Doppeltorse besteht aus dem doppelten Ebenenbüschel mit der Achse $r = l$ und dem einfachen mit der Achse e.

Dem Typus I—IV gehören die Regelflächen vierten Grades erster Art an (vgl. 4).

V. Die Regelfläche vierten Grades vom Typus V hat eine dreifache und eine einfache Leitgerade. Die Bildkurve geht dreimal durch den einen und einmal durch den andern Fundamentalpunkt. Aus der Betrachtung der Bildkurve ergibt sich ohne weiteres:

Die Regelfläche vierten Grades vom Typus V ist vom Geschlecht 0; *sie hat eine dreifache Leitgerade l und eine einfache Leitgerade r, beide stets reell. Ihre Regelschar enthält vier (evtl. paarweise vereinigte) Torsalstrahlen und kommt nur in der hyperbolischen linearen Kongruenz vor. Die Doppeltorse ist das dreifache Ebenenbüschel mit der Achse r.*

VI. Die beiden reellen Leitgeraden r und l vereinigen sich, die Regelschar der Fläche liegt in der parabolischen linearen Kongruenz mit den vereinigten Leitgeraden $r = l$. Die Gerade $r = l$ ist dreifache Gerade der Fläche und Achse des Ebenenbüschels der dreifach berührenden Ebenen. Sie ist zweifache Torsallinie zweiter Ordnung erster Art und einfache Leitgerade der Fläche. Die beiden Kuspidalpunkte auf $r = l$ sind reell oder konjugiert imaginär. Die Fläche hat das Geschlecht 0. — Einen Sonderfall dieses Typus stellt die Voßsche Regelfläche vierten Grades dar, bei der die dreifache Gerade eine Rückkehrtorsallinie ist [9]).

Zum Typus V und VI gehören nur Regelflächen vierten Grades zweiter Art (vgl. 4). Die Typen I, III kommen in der hyperbolischen und der elliptischen linearen Kongruenz vor, V nur in der hyperbolischen, II, IV, VI nur in der parabolischen.

Unsere Nr. I—VI entsprechen den Nr. I, II, VII, VIII, X, XII der von R. Sturm [10]) gegebenen Einteilung. Die übrigen sechs Typen von Regelflächen vierten Grades in der Sturmschen Einteilung kommen mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz nicht vor, sondern sind im (allgemeinen oder speziellen) linearen Strahlenkomplex enthalten.

III. Ringsysteme und Ketten von Regelflächen zweiten Grades in der linearen Kongruenz.

7. Die im Laufe der Ausführungen häufig benützte Abbildung der linearen Kongruenz besteht aus der Elimination zweier Linienkoordinaten aus der quadratischen Plückerschen Fundamentalbeziehung (mit Hilfe der Gleichungen zweier durch die Kongruenz gehenden linearen Komplexe), aus der Deutung der übrigbleibenden Gleichung als Fläche zweiten Grades und aus der stereographischen Projektion dieser Fläche. Da das Projektionszentrum willkürlich wählbar ist, läßt sich der unendlichferne Kongruenzstrahl in das unendlichferne Element der Bildebene überführen. Dann entsprechen nicht nur die Kreise der Bildebene den Regelscharen zweiter Ordnung, sondern die Geraden den parabolischen Regelscharen, der Mittelpunkt eines Bildkreises stellt den in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der zugehörigen Regelfläche zweiten Grades dar, und konzentrische Kreise sind die Bilder konzentrischer Regelflächen zweiten Grades.

8. Zwei gegebene, einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades H_1^2, H_2^2 werden von zwei Systemen von Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz umhüllt. Eine gegebene Regelschar R_n^2 des ersten Systemes $S(R_1^2, R_2^2, \ldots, R_n^2, \ldots)$ berührt H_1^2 längs eines Regelstrahles r_1 und berührt H_2^2 längs

[9]) Voss, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Mathem. Annalen 8 (1875), S. 54—135, insbes. S. 134.

[10]) R. Sturm, Liniengeometrie I, Leipzig 1892, S. 52—61.

eines Regelstrahles r_2; die Berührungen von H_1^2 und H_2^2 mit R_n^2 sind ungleichartig. Eine gegebene Regelschar $R_n'^2$ des zweiten Systemes $S'(R_1'^2, R_2'^2, \ldots, R_n'^2, \ldots)$ berührt H_1^2 längs eines Regelstrahles r_1' und H_2^2 längs eines Regelstrahles r_2'; die Berührungen von H_1^2 und H_2^2 mit $R_n'^2$ sind gleichartig.

Wir kennen die Darstellung der Regelscharsysteme S, S' und der von ihnen umhüllten Flächen zweiten Grades H_1^2, H_2^2 in der Bildebene (Fig. 2 und 3):

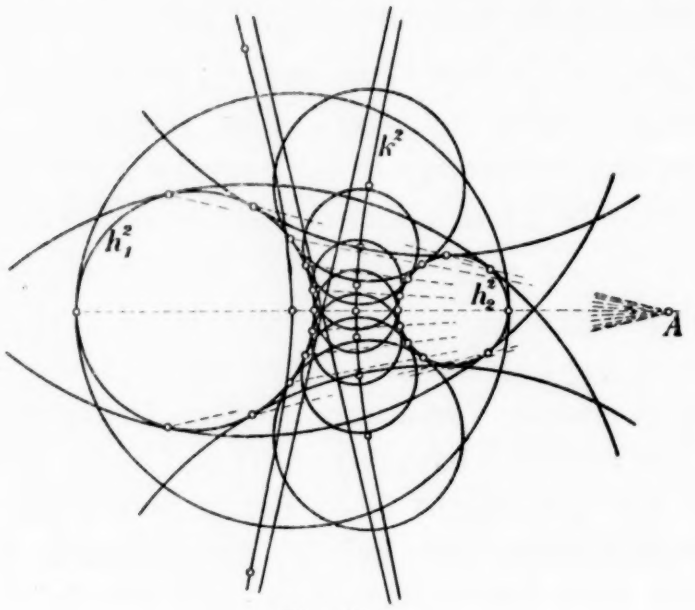


Fig. 2.

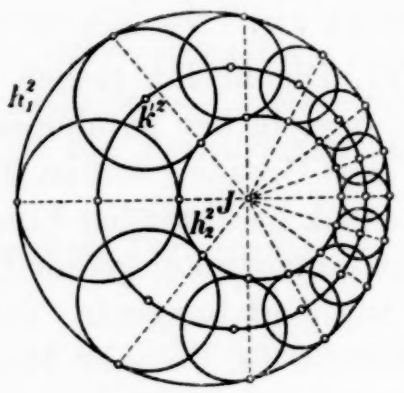


Fig. 3.

Der Mittelpunktsort aller Kreise, die zwei gegebene Kreise h_1^2, h_2^2 je gleichartig oder je ungleichartig berühren, sind zwei Kegelschnitte mit den Brennpunkten in den Mittelpunkten von h_1^2 und h_2^2. Der eine Kegelschnitt k^2 ist Mittelpunktsort aller gleichartig berührenden Kreise, seine Hauptachse ist die Radiendifferenz von h_1^2 und h_2^2. Der andere Kegelschnitt k'^2 ist Mittelpunktsort aller ungleichartig berührenden Kreise, seine Hauptachse ist die Radiensumme von h_1^2 und h_2^2. Die verschiedenen Möglichkeiten, die sich aus der gegenseitigen Lage der Kreise h_1^2, h_2^2 für die Kegelschnitte k^2, k'^2 ergeben, sind durch J. Steiner [11]) bekannt. Jede Verbindungsgerade zweier ungleichartiger Berührungspunkte auf den festen Kreisen h_1^2, h_2^2 geht durch das eine Ähnlichkeitszentrum J dieser Kreise, jede Verbindungsgerade zweier gleichartiger Berührungspunkte geht durch das andere Ähnlichkeitszentrum A.

In jedem Falle sind die Mittelpunktsorte der beiden Hüllkreissysteme die Bilder zweier Regelscharen vierter Ordnung erster Art. Der Mittelpunkt jedes Hüllkreises stellt den in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der entsprechenden Hüllfläche dar. Die Strahlenbüschel erster Ordnung mit den Ähnlichkeitszentren A, J als Mittelpunkten geben zwei Büschel von parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung wieder. Werden die beiden Systeme von Flächen zweiten Grades, welche die Hüllregelscharen tragen, als *Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades* bezeichnet, die Flächen zweiten Grades H_1^2, H_2^2 als deren *Leitflächen*, so folgt:

Zwei gegebene Flächen zweiten Grades H_1^2, H_2^2 werden von zwei Ringsystemen von Regelflächen zweiten Grades umhüllt. Die ∞^1 Flächen des einen Ringsystems berühren die beiden Leitflächen H_1^2, H_2^2 gleichartig, die ∞^1 Flächen des andern Ringsystems berühren

[11]) J. Steiner, Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln, herausgegeben von Rud. Fueter, Zürich u. Leipzig 1931, § 32.

sie ungleichartig. Die Mittetpunktsorte der Flächen beider Ringsysteme sind zwei ebene Kurven vierter Ordnung in der Fluchtebene, und die in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der Flächen beider Ringsysteme erfüllen zwei Regelscharen vierter Ordnung. Die ∞^1 Strahlenparaboloide durch die ∞^1 Paare von Berührungsstrahlen der Regelflächen eines Ringsystems mit den beiden Leitflächen bilden einen Büschel.

Sind die beiden umhüllten Leitflächen H_1^2, H_2^2 konzentrisch, so besteht der Mittelpunktsort beider Ringsysteme aus zwei Kegelschnitten, der Ort jener Durchmesser aber aus zwei Regelscharen zweiter Ordnung.

9. Die Ringsysteme von einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades geben zu eigenartigen und interessanten Flächenkonfigurationen Anlaß. Sie drängen sich uns bei der Betrachtung von *Kreisketten* auf [12]). Wir betrachten *n Kreise* $r_1^2, r_2^2, \ldots, r_n^2$, die zwei feste Kreise h_1^2, h_2^2 (gleichartig oder ungleichartig) berühren; jeder Kreis r_i^2 schneide den folgenden unter rechtem Winkel und der letzte r_n^2 sei zum ersten orthogonal. Wir nennen die Folge der Kreise $r_1^2, \ldots, r_n^2$ eine *zyklisch orthogonale n-gliedrige Kreiskette.* Von selbst ergibt sich hier der Begriff der *zyklisch autopolaren Kette von Regelflächen zweiten Grades.*

Eine n-gliedrige zyklisch autopolare R^2-Kette besteht aus n einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades $R_1^2, R_2^2, \ldots, R_i^2, \ldots, R_n^2$ als Gliedern der Kette ($n \geqq 3$). Jede gegebene Regelfläche R_i^2 der Kette ist für die ihr in der Kette vorangehende und für die ihr nachfolgende Regelfläche zweiten Grades autopolar. Es ist auch R_n^2 für R_1^2 autopolar. Die Kette schließt sich also nach n Gliedern und umhüllt zwei Regelflächen zweiten Grades H_1^2, H_2^2 als Leitflächen in einem oder mehreren Umläufen. Sie ist daher stets in einem Ringsystem von Flächen zweiten Grades enthalten. Eine automorphe Kollineation K der linearen Kongruenz, die das Kettenglied R_1^2 in R_2^2 überführt, verwandelt auch das Glied R_i^2 in R_{i+1}^2 und das letzte R_n^2 in das erste R_1^2. Jede zyklisch autopolare n-gliedrige Kette bedingt eine Kollineation, die zyklisch vom n-ten Grade ist; ihre n-malige Wiederholung erzeugt die Identität.

Die beiden Leitflächen H_1^2, H_2^2 der Kette bestimmen einen Büschel von einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades. Jede einzelne Fläche dieses Büschels geht durch die Kollineation K in sich über. Die ∞^1 Flächen des reziprok polaren Büschels von Flächen zweiten Grades werden dagegen durch die Kollineation ineinander überführt; da die Kollineation K zyklisch vom n-ten Grade ist, ordnet sie die Flächen des reziprok polaren Büschels in Gruppen zu je n.

IV. Konjugierte Richtungen und Polarinvarianz in der Umgebung eines Kongruenzstrahles.

10. Durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s der linearen Kongruenz gehen ∞^2 einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades. Sie bilden einen Bündel und lassen sich auf ∞^1 Büschel von Regelflächen zweiten Grades verteilen. Die auf je einen Büschel entfallenden Flächen berühren je einander längs des Strahles s. Diese ∞^1 R^2-Büschel durch s sind paarweise reziprok polare R^2-Büschel im polaren Raume der Kongruenz [13]). Jeder von ihnen enthält ein und nur ein Strahlenparaboloid. Mit anderen Worten:

---

[12]) Haenzel, Über eine Klasse von Abelschen Gleichungen, Jahresber. d. deutschen Mathem. Vereinigung **41** (1931), S. 73—79.

[13]) Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **83** (1931), S. 731—90.

Die ∞^1 durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s gehenden in der Kongruenz einscharig enthaltenen Strahlenparaboloide sind paarweise füreinander polarinvariant, und ihre in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen bilden in dieser Anordnung eine Involution konjugierter Regelscharen im polaren Raume der Kongruenz.

Beschreibt ein Kongruenzstrahl eine (algebraische oder transzendente) Regelschar $\mathfrak{R}$ und passiert er dabei den Strahl s, so wird die Regelschar $\mathfrak{R}$ — unter der Voraussetzung, daß s für sie ein regulärer Strahl ist — von einer und nur einer durch s gehenden parabolischen Regelschar zweiter Ordnung berührt. Die parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung durch s geben die ∞^1 *Richtungen* an, in denen die s enthaltenden Regelscharen der Kongruenz durch den Strahl s hindurchführen. Wir nennen sie die ∞^1 *Kongruenzrichtungen* durch den Kongruenzstrahl s und bezeichnen zwei durch konjugierte Regelscharen bedingte Richtungen als *konjugierte Kongruenzrichtungen.* Mit anderen Worten:

Die ∞^1 Kongruenzrichtungen durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s sind paarweise konjugiert im polaren Raume der Kongruenz und bilden in dieser Anordnung eine Involution konjugierter Richtungen. Führen zwei (algebraische oder transzendente) Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ der linearen Kongruenz in zwei konjugierten Richtungen durch s, so ist jede die Regelschar $\mathfrak{R}_1$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung für jede $\mathfrak{R}_2$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung autopolar. Insbesondere gilt das auch von den beiden oskulierenden Regelscharen zweiter Ordnung und den beiden berührenden parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung.

Man erkennt, daß die Involution konjugierter Richtungen eine hyperbolische, parabolische oder elliptische ist, je nachdem die hyperbolische, parabolische oder elliptische Kongruenz vorliegt. Auch werden zwei konjugierte Richtungen durch den Kongruenzstrahl s in der Bildebene als senkrechte Richtungen durch den Bildpunkt S dargestellt.

11. Zwei Systeme von Regelscharen der linearen Kongruenz, die sich überall in konjugierten Richtungen durchdringen, bezeichnen wir als *konjugierte Systeme von Regelscharen*, ihre Trägerflächen als *konjugierte Flächensysteme.* Als Beispiele konjugierter Systeme von Regelscharen in der linearen Kongruenz seien hier die folgenden angeführt:

a) Zwei reziprok polare [13]) Büschel B_{I}, B_{II} von Regelscharen zweiter Ordnung; sie senden durch einen jeden gegebenen Kongruenzstrahl zwei füreinander autopolare Regelscharen zweiter Ordnung; ihre Bilder sind zwei zueinander senkrechte Kreisbüschel.

b) Besteht der eine der beiden reziproken Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung aus parabolischen Regelscharen, so haben diese außer dem unendlichfernen Kongruenzstrahle noch einen im Endlichen liegenden Kongruenzstrahl s gemein. Die ∞^1 Regelscharen des anderen Büschels liegen dann auf konzentrischen Strahlenhyperboloiden und diese haben den Kongruenzstrahl s zum gemeinsamen Durchmesser. Als Bild erscheint jetzt der Geradenbüschel durch den Bildpunkt S des Strahles b und der Büschel konzentrischer Kreise um S.

c) Insbesondere lassen sich aus Regelscharen vierter Ordnung erster Art konjugierte Systeme von Regelscharen herstellen. In der Bildebene erscheinen sie im allgemeinen als zwei orthogonale Scharen von ebenen Kurven vierter Ordnung (Fig. Nr.4)[14]). Haben die Regelscharen vierter Ordnung der beiden konjugierten Systeme den unend-

[14]) Orthogonale Netze aus Kurven vierter Ordnung behandelte zuerst Darboux, a. a. O.[6]), S. 58.

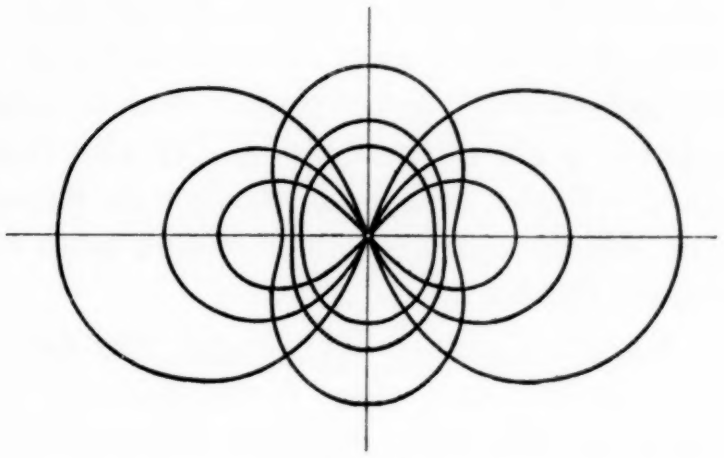


Fig. 4.

lichfernen Kongruenzstrahl zum Doppelregelstrahl oder zum isolierten Regelstrahl, so bilden sie sich als konfokale Kegelschnitte ab.

12. Die nun folgenden Untersuchungen beschränken sich auf die elliptische lineare Kongruenz. Sie läßt sich auf die Kugel und auf die Ebene der gewöhnlichen komplexen Zahlen abbilden. Die in der Theorie der analytischen Funktionen verwendeten Begriffe: Bereich, Weg u. a. sollen daher auf die elliptische lineare Kongruenz übertragen werden.

Eine einfach geschlossene, stückweise aus regulären Regelstrahlen bestehende Regelschar der Kongruenz, die nicht durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl geht, begrenzt einen *einfach zusammenhängenden endlichen Bereich* der elliptischen linearen Kongruenz. Da zwei Kongruenzstrahlen sich niemals reell schneiden, erfüllen die ∞^2 Kongruenzstrahlen des Bereiches das von der Regelschar umgrenzte Raumstück einfach. Zwei gegebene Regelstrahlen des Bereiches lassen sich stets durch *Wege*, d. h. Regelscharen, verbinden, die ganz dem Bereiche angehören. Die Rolle des Kreisbereiches spielt in diesem Zusammenhange der *Hyperboloidbereich*. Der Kreis k^2 der komplexen Zahlenebene entspricht einer hyperbolischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$, sein Mittelpunkt M dem in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser m des zugehörigen Hyperboloides. Dieser Durchmesser m schneidet das Hyperboloid niemals in reellen Punkten. Der Hyperboloidbereich besteht demnach aus der Menge aller von der hyperbolischen Regelschar umschlossenen Kongruenzstrahlen, die auf derselben Seite des Hyperboloides verlaufen wie der Asymptotenkegel.

Die für den Regularitätsbereich einer analytischen Funktion $w = f(z)$ in der komplexen Zahlenebene bewirkte Abbildung überträgt sich sinngemäß auf die elliptische lineare Kongruenz; insbesondere aber findet das ganze Verfahren der analytischen Fortsetzung längs einer Kreiskette und die bekannte Entwicklung des analytischen Gebildes aus einem Funktionselemente hier wie dort seine Anwendung; dabei ist die Kreiskette der Zahlenebene durch die *Kette von Regelscharen zweiter Ordnung* zu ersetzen.

Weil nun die konformen Abbildungen orthogonale Kurvennetze des Regularitätsbereiches in ebensolche überführen, so verwandelt die durch eine analytische Funktion bedingte Abbildung der elliptischen linearen Kongruenz konjugierte Richtungen (vgl. 10) und konjugierte Systeme von Regelscharen (vgl. 11) in ebensolche; sie erhält die *Polarität im Kleinen*.

Diese Übertragung der Funktionentheorie analytischer Funktionen in die Liniengeometrie liefert u. a. ein sehr allgemeines Verfahren für die Transformation von Regelflächen.

13. Gegeben seien zwei reziprok polare [13]) Büschel $B_{\mathrm{I}}(\mathfrak{R}^2)$, $B_{\mathrm{II}}(\mathfrak{R}^2)$ von Regel-

scharen zweiter Ordnung der elliptischen linearen Kongruenz. Die ∞^1 Regelscharen des einen Büschels $B_{\mathrm{I}}(\mathfrak{R}^2)$ gehen durch zwei reelle Grundstrahlen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$, die ∞^1 Regelscharen des anderen Büschels $B_{\mathrm{II}}(\mathfrak{R}^2)$ gehen durch zwei konjugiert imaginäre Grundstrahlen. Jede Regelschar des einen Büschels ist für alle Regelscharen des anderen autopolar. Die Bilder in der Ebene sind zwei orthogonale Kreisbüschel $B_{\mathrm{I}}(k^2)$, $B_{\mathrm{II}}(k^2)$. Die ∞^1 Kreise des einen Büschels $B_{\mathrm{I}}(k^2)$ gehen durch zwei reelle Grundpunkte, gegeben durch die komplexen Zahlen s_1, s_2.

Eine automorphe Kollineation der Kongruenz, die den Grundstrahl $\mathfrak{f}_2$ in den unendlichfernen Kongruenzstrahl und den Grundstrahl $\mathfrak{f}_1$ in einen vorgegebenen Strahl $\mathfrak{o}$ überführt, verwandelt den Büschel $B_{\mathrm{I}}(\mathfrak{R}^2)$ in den Büschel parabolischer Regelscharen zweiter Ordnung durch $\mathfrak{o}$ und den Büschel $B_{\mathrm{II}}(\mathfrak{R}^2)$ in den Büschel konzentrischer Regelscharen zweiter Ordnung mit $\mathfrak{o}$ als gemeinsamen Durchmesser. In der Bildebene erscheint die Kollineation als gebrochene lineare Transformation der komplexen Zahl z von der Form:

$$z' = \alpha \frac{z - s_1}{z - s_2} \qquad (\alpha \text{ komplexe Konstante}),$$

und jene beiden Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung stellen sich dar als Geradenbüschel $\arg z' = c$ durch den Anfangspunkt und als konzentrischer Kreisbüschel $|z'| = c$ um denselben. Die Transformation

$$w = \frac{1}{2}\left(z' + \frac{1}{z'}\right)$$

bildet bekanntlich jene Geraden und Kreise in konfokale Ellipsen und Hyperbeln ab:

$$\frac{u^2}{\left(c + \frac{1}{c}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(c - \frac{1}{c}\right)^2} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1.$$

Die analytische Funktion verwandelt also auch die beiden reziprok polaren Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung $B_{\mathrm{I}}(\mathfrak{R}^2)$, $B_{\mathrm{II}}(\mathfrak{R}^2)$ in zwei konjugierte Systeme von Regelscharen vierter Ordnung erster Art, dargestellt durch die angegebenen konfokalen Ellipsen und Hyperbeln (vgl. 11, c).

Die Regelscharen vierter Ordnung des einen konjugierten Systems (sie sind durch konfokale Ellipsen abgebildet) haben den unendlichfernen Kongruenzstrahl zum isolierten Regelstrahl, die Regelscharen des anderen (abgebildet auf die konfokalen Hyperbeln) haben ihn zum Doppelstrahl (vgl. 11, c).

Die Inversion am Kreise vom Radius ϱ um den Anfangspunkt oder auch die Transformation:

$$z = \frac{\varrho^2}{w}$$

verwandelt die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln in die beiden orthogonalen Scharen von bizirkularen Kurven vierter Ordnung (Fig. 5) mit den Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)^2 \left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)^2 - \frac{\varrho^4}{4}(x^2 + y^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 \sin^2 2c - 4\varrho^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Der Inversionskreis ist in der elliptischen linearen Kongruenz durch eine Regelschar zweiter Ordnung vertreten, und zwei inverse Punkte durch zwei reziprok polare Kongruenzstrahlen in bezug auf die von den Regelscharen bedeckten Regelflächen

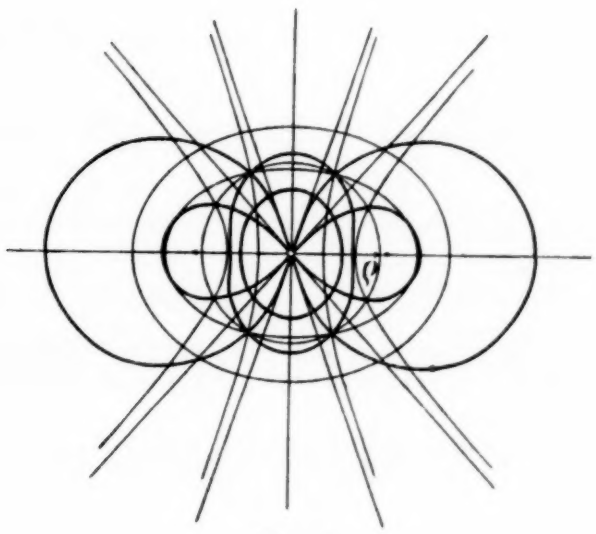


Fig. 5.

zweiten Grades. Die Inversion entspricht einer primären Involution in der linearen Kongruenz, und diese verwandelt demnach die speziellen konjugierten Systeme von Regelscharen vierter Ordnung in zwei allgemeine konjugierte Systeme solcher Regelscharen.

Im ganzen werden durch die angegebene Transformation der linearen Kongruenz zwei konjugierte Büschel füreinander polarinvarianter Regelscharen zweiter Ordnung umkehrbar eindeutig in zwei konjugierte Systeme von Regelscharen vierter Ordnung erster Art überführt.

Eingegangen 3. Januar 1936.

Über die Approximation algebraischer Zahlen.

Von *Theodor Schneider* in Frankfurt a. M.

C. L. Siegel [1]) bewies den Satz:

Es seien $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ die Näherungsbrüche bei der Entwicklung einer reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade $n \geqq 2$ in einen regelmäßigen Kettenbruch; dann gibt es unter diesen Näherungsbrüchen eine unendliche Teilfolge $\frac{p_{m_1}}{q_{m_1}}, \frac{p_{m_2}}{q_{m_2}}, \ldots$, für welche die Ungleichungen

$$\left|\xi - \frac{p_{m_\nu}}{q_{m_\nu}}\right| > \frac{1}{q_{m_\nu}^{\alpha}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

mit $\alpha = e\left(\log n + \frac{1}{2 \log n}\right)$ gelten.

In der vorliegenden Arbeit verschärfe ich das Siegelsche Ergebnis und erhalte den

Satz 1. *Es sei ξ eine reelle algebraische irrationale Zahl und $\mu > 2$. Die Lösungen der Ungleichung*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^{\mu}} \tag{1}$$

in ganzrationalen Zahlen p, q $(q > 0)$ seien $p^{(\nu)}, q^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots; q^{(1)} \leqq q^{(2)} \leqq \cdots)$; dann ist die Anzahl dieser Lösungen entweder endlich oder es ist

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\log q^{(\nu+1)}}{\log q^{(\nu)}} = \infty .$$

In der unter [1]) angeführten Untersuchung bewies C. L. Siegel nämlich einen ohne Schwierigkeit zu seinem obigen Ergebnis führenden Hilfssatz, welcher die dem Satze 1 entsprechende Aussage für $\mu = e\left(\log n + \frac{1}{2 \log n}\right)$ enthält. — Außerdem wies er darauf hin, daß Satz 1 für $\mu = 2$ nicht mehr gültig ist.

Über Satz 1 hinausgehend gelingt es jedoch, bereits für $\mu' > 1$ eine Aussage über solche Lösungen $\frac{p}{q}$ der Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^{\mu'}} \tag{1'}$$

zu machen, deren Nenner q einer geeigneten Bedingung genügen. Es gebe z. B. unter

[1]) C. L. Siegel, Über Näherungswerte algebraischer Zahlen, Mathematische Annalen 84 (1921), S. 80—99.

den Lösungen $\frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}}$ von (1′) derartige, daß die Nenner $q^{(\nu)}$ Potenzen eines festen $q^{(\nu_0)}$ mit positiven ganzen Exponenten sind. Ich bezeichne diese mit $\frac{p^{(\nu')}}{q^{(\nu')}}$. Dann gilt über die Anzahl dieser Lösungen $\frac{p^{(\nu')}}{q^{(\nu')}}$ die gleiche Aussage wie in Satz 1 über $\frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}}$.

Es macht keine neue Schwierigkeit, die vorstehenden Ergebnisse auf Aussagen über Annäherung durch algebraische Zahlen auszudehnen. Der Hauptsatz (= Satz 1) wird damit verallgemeinert zu

Satz 2. *Sei ξ algebraisch irrational, $\mathfrak{H}$ ein algebraischer Zahlkörper, in bezug auf den ξ vom Grade $d \geqq 2$ ist, ζ eine primitive Zahl aus $\mathfrak{H}$ und $\mu > 2$. Ordnet man die Lösungen $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots$ der Ungleichung*

$$|\xi - \zeta| \leqq \frac{1}{H(\zeta)^{\mu}}$$

nach wachsenden Höhen $H(\zeta)$, so hat diese Ungleichung entweder nur endlich viele Lösungen oder es ist $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \frac{\log H(\zeta^{(\nu+1)})}{\log H(\zeta^{(\nu)})} = \infty$.

Selbstverständlich kann man diese Sätze anwenden, um neue transzendente Zahlen zu konstruieren; so folgt beispielsweise aus dem Zusatz von Satz 1, daß

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{[(1+\varepsilon_0)^n]}$$

transzendent ist für rationales $\frac{p}{q} \neq 0$, $\left|\frac{p}{q}\right| < 1$ und $\varepsilon_0 > 0$.

Dem Beweise des Hauptsatzes schicke ich drei vorbereitende Hilfssätze voraus. An dieser Stelle möchte ich auf den ersten dieser Hilfssätze hinweisen, da dieser auch ohne Verbindung mit dem in dieser Arbeit behandelten Problem von Interesse sein dürfte.

Hilfssatz 1. *$r_1, r_2, \ldots, r_k$ seien natürliche Zahlen. Man schneide den Quader* $-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ *mit der $(k-1)$-dimensionalen Ebene* $\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} = t$. *Bildet man den Quotienten Q aus der Anzahl $f_k(t)$ der Gitterpunkte, die in dem kleineren Quaderabschnitt (mit Einschluß seiner Oberfläche) liegen, und der Anzahl der Gitterpunkte des ganzen Quaders, so ist Q für hinreichend großes k beliebig klein* [2]).

Beweis. [3]) Es sei $\varphi_0(t) = 1$ für $|t| \leqq \frac{1}{2}$ und $\varphi_0(t) = 0$ für $|t| > \frac{1}{2}$ die Anzahl der Gitterpunkte des Gebietes

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

und

$$t - \frac{1}{2} \leqq \frac{x_1}{r_1} + \cdots + \frac{x_k}{r_k} < t + \frac{1}{2}.$$

---

[2]) Unter Gitterpunkten verstehe man diejenigen Punkte, die durch Verschiebung einer Quaderecke um ganzzahlige Werte parallel zu den Quaderkanten entstehen.

[3]) Der hier angegebene Beweis von Hilfssatz 1 benutzt eine Idee von C. L. Siegel, mit deren Hilfe mein ursprünglicher Beweis sich wesentlich vereinfachte.

Dann folgt

$$\varphi_k(t) = \sum_{x_k=-\frac{r_k}{2}}^{\frac{r_k}{2}} \varphi_{k-1}\left(t - \frac{x_k}{r_k}\right). \tag{2}$$

Außerdem sei $f_k(t)$ die Anzahl der Gitterpunkte des Gebietes

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

und

$$t \leqq \frac{x_1}{r_1} + \cdots + \frac{x_k}{r_k};$$

dann gilt

$$f_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_k\left(t + m - \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Die Ungleichung

$$\varphi_{k-1}(t) \leqq e^{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{k}} \prod_{\varkappa=1}^{k-1} (r_\varkappa + 1) \tag{4}$$

ist richtig für $k = 1$; sie gelte auch für $k = 2, \ldots, l$, dann folgt aus (2)

$$\begin{aligned} \varphi_l(t) &\leqq \sum_{x_l=-\frac{r_l}{2}}^{\frac{r_l}{2}} \left(e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{l}\left(t - \frac{x_l}{r_l}\right)^2} \prod_{\lambda=1}^{l-1} (r_\lambda + 1) \right) \\ &= e^{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{l}} \prod_{\lambda=1}^{l-1} (r_\lambda + 1) \sum_{x_l=-\frac{r_l}{2}}^{\frac{r_l}{2}} e^{-\frac{1}{l}\left(\frac{x_l}{r_l}\right)^2} e^{2\frac{t}{l}\frac{x_l}{r_l}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Für ein beliebiges ganzes x_l aus $0 \leqq x_l \leqq \frac{r_l}{2}$ setze man $\frac{x_l}{r_l} = \frac{\zeta}{2}$. Dann ist

$$\zeta \leqq 1, \tag{6}$$

und es gilt

$$e^{-\frac{\zeta^2}{4l}} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t\zeta}{l}} + e^{-\frac{t\zeta}{l}}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t\zeta}{l}} + e^{-\frac{t\zeta}{l}}\right) \leqq e^{\frac{(t\zeta)^2}{l(l+1)}},$$

da

$$\left(\frac{t\zeta}{l}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{(2m)!} \leqq \left(\frac{(t\zeta)^2}{l(l+1)}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ist. Wegen (6) ist

$$e^{\frac{(t\zeta)^2}{l(l+1)}} \leqq e^{\frac{t^2}{l(l+1)}} = e^{\frac{t^2}{l} - \frac{t^2}{l+1}}.$$

Damit folgt aus (5)

$$\varphi_l(t) \leqq e^{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{l+1}} \prod_{\lambda=1}^{l} (r_\lambda + 1).$$

Es ist also (4) auch mit $k + 1 = l$ und daher allgemein für $k = 1, 2, \ldots$ gültig. Aus (3)

erhält man dann für $t > \frac{1}{2}$

$$\frac{f_k(t)}{\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa+1)} \leqq e^{\frac{1}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{(t+m-\frac{1}{2})^2}{k+1}} \leqq e^{\frac{1}{4}} \int_{t-\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{k+1}} dx \leqq e^{\frac{1}{4}} \frac{k+1}{2t-1} e^{-\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{k+1}},$$

und hieraus folgt

$$f_k(t) \leqq \frac{1}{B} \prod_{\varkappa=1}^{k} (r_\varkappa + 1) \tag{7}$$

für $t \geqq \sqrt{\frac{k}{2} \log k}$, $k > K(B)$ bei beliebig großem, von k unabhängigem B. Die Anzahl der Gitterpunkte des ganzen Quaders ist $\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa+1)$ und somit $Q = \dfrac{f_k(t)}{\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa+1)}$.

Nach (7) ist also für $t \geqq \sqrt{\frac{k}{2} \log k}$, $k > K$ der Quotient

$$Q \leqq \frac{1}{B}.$$

Hilfssatz 2. *Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl vom Grade $n \geqq 2$. Ferner sei $r = \max(r_1, \ldots, r_k)$. Setzt man $t = \varepsilon k$ ($\varepsilon > 0$ unabhängig von k) und wählt k derart, daß Hilfssatz* 1 *mit $B = 2n+1$ oder*

$$Q < \frac{1}{2n} \tag{8}$$

erfüllt ist, so lautet die Behauptung:

Es gibt ein nicht identisch verschwindendes Polynom $R(z_1, \ldots, z_k)$ mit ganzrationalen Koeffizienten und vom Grade $r_\varkappa$ in $z_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) so, daß

1. *die Werte*

$$\left.\frac{\partial^{\tau_1+\cdots+\tau_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\tau_1} \cdots \partial z_k^{\tau_k}}\right|_{z_1=z_2=\cdots=z_k=\xi} = 0 \tag{9}$$

sind, falls $\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq k\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_k$ nichtnegative ganzrationale Zahlen bedeuten;

2. *die Ungleichung*

$$\left|\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_k!\, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_k^{\varrho_k}}\right| < \gamma_1^r \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + |z_\varkappa|)^{r_\varkappa} \tag{10}$$

erfüllt ist, wobei die ganzrationalen Zahlen $\varrho_\varkappa \geqq 0$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) sind und die natürliche Zahl γ_1 nur von k, ε, ξ abhängt [4]).

Beweis. Es sei $R(z_1, \ldots, z_k)$ ein Polynom vom Grade $r_\varkappa$ in $z_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) mit noch zu bestimmenden Koeffizienten C_ω ($\omega = 1, \ldots, \prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa+1)$), die zunächst als Unbestimmte gedacht seien. Diese Unbestimmten müssen nach (9) A linearen homogenen Gleichungen genügen. Jede dieser Gleichungen zerfällt aber, da ξ eine algebra-

[4]) Ebenso sollen alle noch auftretenden natürlichen Zahlen $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ nur von k, ε, ξ, nicht aber von $r_1, \ldots, r_k$ abhängen.

ische Zahl n-ten Grades ist, in n Bedingungen mit rationalen Koeffizienten. Die ganzrationalen Zahlen C_ω sind also derart zu bestimmen, daß sie nicht alle gleich Null sind, ein lineares homogenes Gleichungssystem $\{S_\chi\}$ $(\chi = 1, \ldots, nA)$ befriedigen und absolut genommen nicht „allzu" große Werte annehmen. — Die ganzrationale Zahl γ_2 sei so gewählt, daß $\gamma_2 \xi$ ganzalgebraisch ist. Dann hat das mit γ_2^{kr} multiplizierte Gleichungssystem $\{S_\chi\}$, das ich $\{S'_\chi\}$ nennen will, ganzrationale Koeffizienten, die absolut genommen kleiner sind als γ_3^r. Die Anzahl der Unbekannten ist nach (8) größer als das Doppelte der Anzahl der Gleichungen, denn es ist

$$\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa + 1) > 2nQ \prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa + 1) = 2nA\,.$$

Nach einem mittels des Schubfachschlusses früher bewiesenen Satze[5]) ist das Gleichungssystem $\{S'_\chi\}$ in nicht sämtlich verschwindenden ganzrationalen Zahlen C_ω lösbar, so daß

$$|C_\omega| < \gamma_4^r \tag{11}$$

ist. — Nachdem nun die Koeffizienten C_ω von $R(z_1, \ldots, z_k)$ bestimmt und nach (11) abgeschätzt sind, erhält man ohne weitere Rechnung die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_k!\, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_k^{\varrho_k}}\right| < \gamma_4^r \prod_{\lambda=1}^{k}\binom{r_\lambda}{\varrho_\lambda} \prod_{\varkappa=1}^{k}(1 + |z_\varkappa|)^{r_\varkappa}\,.$$

Da aber $\binom{r_\lambda}{\varrho_\lambda} < 2^{r_\lambda}$ ist und man $\prod_{\lambda=1}^{k} 2^{r_\lambda} < \gamma_5^r$ setzen kann, folgt aus obiger Abschätzung die Behauptung (10).

Hilfssatz 3. *Es seien* $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ *ganzrationale Zahlen mit* $q_\nu > 0$ *und* $(p_\nu, q_\nu) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, k)$. $R(z_1, \ldots, z_k)$ *sei das in Hilfssatz* 2 *bestimmte Polynom. Dann lautet die Behauptung: Ist*

$$\log q_\nu > \gamma_6 r \prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda + 1)^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{12}$$

(*für* $\nu = k$ *bedeute* $\prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda + 1)$ *die Zahl* 1), *so existieren* $k - 1$ *Zahlen*

$$\varrho_\nu < \prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda + 1) \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1) \tag{13}$$

so, daß

$$\left.\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}}\right|_{z_1=\frac{p_1}{q_1}, \ldots, z_k=\frac{p_k}{q_k}} \neq 0$$

ist. Selbstverständlich folgt dann $\varrho_\nu \leqq r_\nu$.

Beweis. Ich möchte eine in der Literatur bereits mehrfach bewiesene Tatsache voraussetzen[6]): Sind $\psi_1(z), \ldots, \psi_s(z)$ linear unabhängige Polynome mit rationalen Koeffizienten, so ist die Wronskische Determinante dieser s Polynome nicht identisch 0.

---

[5]) Th. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I, Journal für die reine und angewandte Mathematik **172** (1934), S. 65—69 (Hilfssatz 1).

[6]) C. L. Siegel, Über den Thueschen Satz, Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-naturv. Klasse (1921) No. 16, S. 8, oder C. L. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Mathematische Zeitschrift **10** (1921), S. 177—178 (Hilfssatz IV).

Die Funktion R schreibe ich in der Form

$$R(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\nu_1=0}^{r_1} z_1^{\nu_1} S_{\nu_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) .$$

Von den $r_1 + 1$ Polynomen $S_{\nu_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k)$ seien $t_1 + 1$ voneinander linear unabhängig; ich bezeichne sie mit

$$U_0^{[1]}(z_2, \ldots, z_k), \ldots, U_{t_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) .$$

Da R nicht identisch verschwindet, folgt

$$0 \leqq t_1 \leqq (r_2 + 1) \cdots (r_k + 1) - 1 .$$

Zwischen den $S_{\nu_1}^{[1]}$ und den $U_\beta^{[1]}$ $(\beta = 0, \ldots, t_1)$ gelten lineare Beziehungen der folgenden Art:

$$S_{\nu_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) = \sum_{\beta=0}^{t_1} b_{\beta\nu_1}^{[1]} U_\beta^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) \qquad (\nu_1 = 0, \ldots, r_1) .$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $U_\beta^{[1]}$ ergeben sich die

$$b_{\beta\nu_1}^{[1]} \qquad (\beta = 0, \ldots, t_1;\ \nu_1 = 0, \ldots, r_1)$$

als rationale Zahlen, deren Zähler und Hauptnenner unter Berücksichtigung von (11) absolut genommen kleiner sind als $(t_1 + 1)!\ \gamma_4^{r(t_1+1)}$. — Mittels der letzten Beziehung erhält man für R die Darstellung:

$$R(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\beta=0}^{t_1} g_\beta^{[1]}(z_1)\ U_\beta^{[1]}(z_2, \ldots, z_k);$$

dabei ist

$$g_\beta^{[1]}(z_1) = \sum_{\nu_1=0}^{r_1} b_{\beta\nu_1}^{[1]} z_1^{\nu_1} \qquad (\beta = 0, \ldots, t_1) .$$

Da die Matrix $(b_{\beta\nu_1}^{[1]})$ den Rang $t_1 + 1$ hat, sind auch die Polynome $g_\beta^{[1]}(z_1)$ voneinander linear unabhängig. Durch Differentiation folgt

$$\frac{\partial^{\alpha_1} R(z_1, \ldots, z_k)}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}} \sum_{\beta=0}^{t_1} \frac{\partial^{\alpha_1} g_\beta^{[1]}(z_1)}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}}\ U_\beta^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) .$$

Nach dem eingangs dieses Beweises vorausgeschickten Satze ist die Determinante

$$\Delta^{[1]}(z_1) = \left| \frac{\partial^{\alpha_1} g_\beta^{[1]}(z_1)}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}} \right| \not\equiv 0 \quad (\alpha_1 = 0, \ldots, t_1;\ \beta = 0, \ldots, t_1).$$

Bezeichne ich die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Spalte von $\Delta^{[1]}$ mit $\Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1)$ $(\alpha_1 = 0, \ldots, t_1)$, so ist

$$\sum_{\alpha_1=0}^{t_1} \Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1) \frac{\partial^{\alpha_1} R}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}} = \Delta^{[1]}(z_1) \cdot U_0^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) .$$

Das Polynom $\Delta^{[1]}(z_1)$ ist vom Grade $(t_1 + 1)\, r_1 \leqq \prod_{\lambda=2}^{k} (r_\lambda + 1) \cdot r_1$. Seine Koeffizienten sind rational, und ihre Zähler und Nenner sind nach den über $b_{\beta\nu_1}^{[1]}$ gewonnenen Feststellungen absolut genommen $< \gamma_7^{r \cdot \prod_{\lambda=2}^{k} (r_\lambda + 1)^2}$. Die Koeffizienten von $U_0^{[1]}(z_2, \ldots, z_k)$ hingegen genügen derselben Abschätzung (11) wie diejenigen von R.

Man denke sich in obiger Überlegung $U_0^{[1]}$ an die Stelle von R gesetzt und ge-

winnt, wenn $U_0^{[2]}$ die $U_0^{[1]}$ entsprechende Funktion von $z_3, \ldots, z_k$ und $\Delta^{[2]}(z_2)$ das $\Delta^{[1]}(z_1)$ entsprechende Polynom ist, die Eliminationsgleichung von z_2:

$$\sum_{\alpha_2=0}^{t_2} \Delta_{\alpha_2}^{[2]}(z_2) \frac{\partial^{\alpha_2} U_0^{[1]}}{\alpha_2!\, \partial z_2^{\alpha_2}} = \Delta^{[2]}(z_2) \cdot U_\sigma^{[2]}(z_3, \ldots, z_k),$$

oder mit derjenigen von z_1 zusammengefaßt:

$$\sum_{\alpha_1=0}^{t_1} \sum_{\alpha_2=0}^{t_2} \Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1)\, \Delta_{\alpha_2}^{[2]}(z_2) \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} R}{\alpha_1!\, \alpha_2!\, \partial z_1^{\alpha_1}\, \partial z_2^{\alpha_2}} = \Delta^{[1]}(z_1)\, \Delta^{[2]}(z_2)\, U_0^{[2]}(z_3, \ldots, z_k).$$

Hier ist

$$0 \leqq t_2 \leqq (r_3 + 1) \cdots (r_k + 1) - 1.$$

Das Polynom $\Delta^{[2]}(z_2)$ ist vom Grade $(t_2 + 1)r_2$; Zähler und Hauptnenner seiner rationalen Koeffizienten sind absolut genommen $< \gamma_8^{r \cdot \prod_{\lambda=3}^{k} (r_\lambda+1)^2}$.

Führt man dieses Verfahren fort, so erhält man mit dem $(k-1)$-ten Schritte die Eliminationsgleichung von z_{k-1}:

$$\sum_{\alpha_{k-1}=0}^{t_{k-1}} \Delta_{\alpha_{k-1}}^{[k-1]}(z_{k-1}) \frac{\partial^{\alpha_{k-1}} U_0^{[k-2]}}{\alpha_{k-1}!\, \partial z_{k-1}^{\alpha_{k-1}}} = \Delta^{[k-1]}(z_{k-1})\, U^{[k-1]}(z_k).$$

Wird $U_0^{[k-1]}(z_k) = \Delta^{[k]}(z_k)$ gesetzt, so folgt durch Zusammenfassung der Eliminationsgleichungen von $z_1, \ldots, z_{k-1}$ die Relation

$$\sum_{\alpha_\nu=0\ (\nu=1,\ldots,k-1)}^{t_\nu} \Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1) \cdots \Delta_{\alpha_{k-1}}^{[k-1]}(z_{k-1}) \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\alpha_1! \cdots \alpha_{k-1}!\, \partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\alpha_{k-1}}} = \Delta^{[1]}(z_1) \cdots \Delta^{[k]}(z_k). \tag{14}$$

Für $\nu = 1, \ldots, k-1$ ist dabei

$$0 \leqq t_\nu \leqq (r_{\nu+1} + 1) \cdots (r_k + 1) - 1; \tag{15}$$

Zähler und Hauptnenner $H^{[\nu]}$ der Koeffizienten von $\Delta^{[\nu]}(z_\nu)$ sind dem absoluten Betrage nach $< \gamma_9^{r \cdot \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda+1)^2}$. Multipliziert man das Polynom $\Delta^{[\nu]}(z_\nu)$ mit $H^{[\nu]}$, so sind die ganzrationalen Koeffizienten des entstandenen Polynoms $\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)$ absolut genommen $< \gamma_9^{2r \cdot \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda+1)^2}$ und, wenn man $e^{\gamma_6} > \gamma_9^2$ setzt und (12) anwendet, sogar

$$< e^{\gamma_6 r \cdot \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda+1)^2} < q_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1).$$

Keines der Polynome $\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ verschwindet für $z_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$, denn sonst müßte der Quotient $\frac{\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)}{q_\nu z_\nu - p_\nu}$ ganzrationale Koeffizienten haben und speziell müßte q_ν in den Koeffizienten des höchsten Gliedes von $\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)$ aufgehen. Dies ist aber nach der zuletzt geführten Abschätzung unmöglich. Folglich ist für $z_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ die rechte und damit auch die linke Seite von (14) ungleich Null. Es verschwinden also nicht sämtliche Ableitungen $\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}$ für $z_1 = \frac{p_1}{q_1}, \ldots, z_k = \frac{p_k}{q_k}$, wenn

nach (15) $0 \leqq \alpha_\nu \leqq (r_{\nu+1}+1)\cdots(r_k+1)-1 \quad (\nu = 1, \ldots, k-1)$ ist. Das Wertesystem α_ν, für das die entsprechende Ableitung von R an der Stelle $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ nicht verschwindet, bezeichne ich mit ϱ_ν $(\nu = 1, \ldots, k-1)$. Mit diesen ϱ_ν ist die Bedingung (13) erfüllt und damit Hilfssatz 3 bewiesen.

Beweis des Hauptsatzes. Ich nehme an, Ungleichung (1) besitze unendlich viele Lösungen und es seien $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ Lösungen dieser Ungleichung. Ich setze

$$r_\nu = \left[r_k \frac{\log q_k}{\log q_\nu}\right] \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1); \tag{16}$$

daraus folgt

$$(r_\nu + 1)\log q_\nu > r_k \log q_k \geqq r_\nu \log q_\nu .$$

Ich mache nun die Voraussetzung: Es sei $\overline{\lim}\frac{\log q^{(\nu+1)}}{\log q^{(\nu)}}$ eine endliche Zahl. Dann gilt von einem gewissen ν_0 ab für alle $\nu > \nu_0$ die Ungleichung

$$\frac{\log q^{(\nu+1)}}{\log q^{(\nu)}} \leqq \eta . \tag{17}$$

Durch das Bestehen von (17) ist es möglich, k Ungleichungen über $q_1, \ldots, q_k$ so vorauszusetzen, daß die unter Hinzunahme der schon bestehenden Bedingungen dadurch bestimmten $q_1, \ldots, q_k$ und $r_1, \ldots, r_k$ alle in den Hilfssätzen 2 und 3 über diese Größen gemachten Annahmen erfüllen. Diese Ungleichungen lauten:

$$\log q_1 > \gamma_{10} r_k^{4\cdot 3^{k-2}} \quad \text{mit einem hinreichend großen } \gamma_{10}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\eta} r_k^{4\cdot 3^{k-\nu-2}} < \frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu} \leqq r_k^{4\cdot 3^{k-\nu-2}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-2), \tag{19}$$

$$\frac{1}{\eta} r_k < \frac{\log q_k}{\log q_{k-1}} \leqq r_k . \tag{20}$$

Aus (16), (19) und (20) folgt, falls r_k genügend groß, $r_1 = \max(r_1, \ldots, r_k) = r$ und $r_k = \min(r_1, \ldots, r_k)$.

Aus (19) und (20) folgt weiter

$$\frac{\log q_k}{\log q_\nu} \leqq r_k^{1+4\sum_{\lambda=\nu}^{k-2} 3^{k-\lambda-2}} = r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}-1} .$$

Nach (16) ist nun

$$r_\nu \leqq r_k \frac{\log q_k}{\log q_\nu} \leqq r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1) .$$

Hieraus schließt man

$$\gamma_6 r \prod_{\lambda=2}^{k}(r_\lambda+1)^2 < \gamma_{11} r \prod_{\lambda=2}^{k} r_\lambda^2 \leqq \gamma_{11} r_k^{2\cdot 3^{k-2}} r_k^2 \prod_{\lambda=2}^{k-1} r_k^{4\cdot 3^{k-\lambda-1}};$$

da $r_k \prod_{\lambda=2}^{k-1} r_k^{2\cdot 3^{k-\lambda-1}} = r_k^{3^{k-2}}$ ist, ergibt sich also

$$\gamma_6 r \prod_{\lambda=2}^{k}(r_\lambda+1)^2 < \gamma_{11} r_k^{4\cdot 3^{k-2}} < \log q_1 ,$$

wenn nur in (18) $\gamma_{10} > \gamma_{11}$ ist. Da aus (19) und (20) außerdem folgt, daß $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ ist für hinreichend großes r_k, ist (12) erfüllt. Aus den linken Seiten von (19) und (20) leitet man unter Benutzung von (16) ab:

$$\frac{1}{\eta^{k-\nu}} r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}-1} < \frac{\log q_k}{\log q_\nu} < \frac{r_\nu + 1}{r_k}$$

oder

$$r_\nu > \frac{1}{\eta^{k-\nu}} r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}} - 1 \geqq \frac{1}{\gamma_{12}} r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}};$$

mit Hilfe dieser Abschätzung erhält man aus

$$\prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda + 1) < \gamma_{13} \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} r_\lambda \leqq \gamma_{13} r_k \prod_{\lambda=\nu+1}^{k-1} r_k^{2\cdot 3^{k-\lambda-1}} = \gamma_{13} r_k^{3^{k-\nu-1}}$$

die Ungleichung

$$(21) \qquad r_\nu > \frac{r_k^{3^{k-\nu-1}}}{\gamma_{12}\gamma_{13}} \prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda + 1) \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1).$$

Es sei nun r_k so groß gewählt, daß

$$(22) \qquad \varepsilon \frac{r_k}{\gamma_{12}\gamma_{13}} > \gamma_{14} \qquad \left(\frac{1}{8} > \varepsilon > 0\right)$$

erfüllt ist; hierbei sei γ_{14} so angenommen, daß mit (22) auch die seitherigen Voraussetzungen eines hinreichend großen r_k befriedigt sind. Dann folgt aus (13), (21) und (22)

$$(23) \qquad \varrho_\nu < \varepsilon r_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1).$$

Nach Hilfssatz 3 ist die rationale Zahl

$$\left.\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_{k-1}!\, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}}\right|_{z_1=\frac{p_1}{q_1}, \ldots, z_k=\frac{p_k}{q_k}} = R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right) \neq 0.$$

Mithin ist, da die Koeffizienten von R ganzrational sind, die ganzrationale Zahl

$$(24) \qquad q_1^{r_1} \cdots q_k^{r_k} \left| R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| \geqq 1.$$

Nach (9) treten in der Entwicklung von $R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}(z_1, \ldots, z_k)$ nach Potenzen von $z_1 - \xi, \ldots, z_k - \xi$ keine Glieder auf, deren Exponenten $\tau_1 - \varrho_1, \ldots, \tau_k - \varrho_k$ $(\varrho_k = 0)$ der Bedingung

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau_\lambda}{r_\lambda} \leqq k\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right), \qquad \tau_\lambda - \varrho_\lambda \geqq 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, k)$$

genügen. Daraus folgt in Verbindung mit (23), daß alle Glieder mit dem Exponenten τ'_λ verschwinden, wenn nur

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau'_\lambda}{r_\lambda} \leqq k\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)$$

ist. Es ist infolgedessen von jedem Gliede der Potenzentwicklung von $R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}$ ein Faktor $\Phi(z_1, \ldots, z_k) = (z_1 - \xi)^{\sigma_1} \ldots (z_k - \xi)^{\sigma_k}$ abspaltbar, wobei die σ_λ die Ungleichung

$$(25) \qquad \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\sigma_\lambda}{r_\lambda} \geqq k\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)$$

erfüllen. Nach Ungleichung (1) ist

$$\left|\Phi\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q_k}\right)\right| \leqq q_1^{-\mu\sigma_1}\ldots q_k^{-\mu\sigma_k}. \tag{26}$$

Aus (16) folgt

$$q_k^{\frac{r_k-1}{r_\nu}} < q_\nu \leqq q_k^{\frac{r_k}{r_\nu}} \qquad (\nu=1,\ldots,k). \tag{27}$$

Eliminiert man $q_\nu\,(\nu=1,\ldots,k-1)$ mittels (27) aus der rechten Seite von (26), so erhält man nach (25)

$$\left|\Phi\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q_k}\right)\right| < q_k^{-\mu(r_k-1)\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\sigma_\lambda}{r_\lambda}} \leqq q_k^{-\mu(r_k-1)k\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)}.$$

Benutzt man nun (22), so erkennt man

$$\left|\Phi\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q_k}\right)\right| < q_k^{-\mu r_k k\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)}. \tag{28}$$

Jetzt kann man $\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q_k}\right)\right|$ abschätzen. Es ist nach (10) und (28)

$$\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q^k}\right)\right| < \gamma_1^r\prod_{\lambda=1}^{k}\gamma_{15}^{r_\lambda}\,q_k^{-\mu r_k k\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)} < \gamma_{16}^r\,q_k^{-r_k k\mu\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)}.$$

Berücksichtigt man die rechte Seite von (27), so erkennt man, daß das Produkt

$$q_1^{r_1}\ldots q_k^{r_k} \leqq q_k^{r_k k}$$

ist. Damit ist die ganzrationale Zahl

$$q_1^{r_1}\ldots q_k^{r_k}\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q_k}\right)\right| < \gamma_{16}^r\,q_k^{r_k k\left(1-\mu\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)\right)}.$$

Bestimmt man nun ε derart, daß $\left(\frac{1}{2}-4\varepsilon\right)\mu=1$, d. h. $\varepsilon=\frac{1}{8}-\frac{1}{4\mu}$ ist, und wählt man r_k so groß, daß $\gamma_{16} < q_1^{k\frac{\varepsilon}{1-8\varepsilon}}$ ist, so erhält man nach (27)

$$q_1^{r_1}\ldots q_k^{r_k}\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_k}{q_k}\right)\right| < q_k^{r_k k\left(\frac{\varepsilon}{1-8\varepsilon}+1-\frac{\frac{1}{2}-3\varepsilon}{\frac{1}{2}-4\varepsilon}\right)} = q_k^{-r_k k\frac{\varepsilon}{1-8\varepsilon}}. \tag{29}$$

Nach (22) ist aber die rechte Seite von (29) kleiner als 1 im Widerspruch zu (24). Diesen Widerspruch kann man beseitigen, indem man die Annahme (17) fallen läßt; damit erhält man aber den behaupteten Satz.

Ergänzend möchte ich noch auf die in der Einleitung an Satz 1 anschließende Bemerkung zurückkommen. [7])

Man bilde analog R ein Polynom $R'(z_1,\ldots,z_k)$ von den Höchstgraden r_ν in z_ν und denke es sich nach Potenzen von $z_1-\xi,\ldots,z_k-\xi$ entwickelt. Die Exponenten seien mit $\tau_1,\ldots,\tau_k$ bezeichnet. Dann sollen diejenigen Glieder nicht auftreten, für die

$$1.\qquad \sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\tau_\lambda}{r_\lambda} \leqq k\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right)$$

---

[7]) Zusatz bei der Korrektur: Herr K. Mahler teilte mir mit, daß er mittels meiner Methode analoge Sätze bewiesen hat für den Fall, daß man sich auf Näherungsbrüche $\frac{p}{q}$ beschränkt, deren Zähler oder Nenner nur durch beschränkte Primzahlen teilbar sind; seine Arbeit erscheint demnächst in den Proceedings of the Academie van Wetenschappen te Amsterdam.

und für die

$$2. \qquad \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau_\lambda}{r_\lambda} \geqq k\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)$$

ist. Man beweist auch hier leicht die entsprechenden Hilfssätze. Beim Beweise des nunmehrigen Hauptsatzes bilde man, um R' durch Multiplikation ganzrational zu machen, nicht das Produkt $q_1^{r_1}\cdots q_k^{r_k}$, sondern einen geeigneten Hauptnenner. In speziellen Fällen hat dieser Hauptnenner nur die Größenordnung $O(q_k^{r_k\, k\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)})$, und in diesen Fällen gelingt es, die Ungleichung (1) sogar für $\mu' > 1$ zu beweisen.

Eingegangen 19. Januar 1936.

Nachdem ich nunmehr über vierundzwanzig Jahre die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik geführt und einundfünfzig seiner Bände herausgegeben habe, fühle ich die Zeit gekommen, diese Aufgabe in jüngere Hände zu legen. Es ist mir ein aufrichtiges Bedürfnis, bei diesem Abschluß einer langen mir ans Herz gewachsenen Tätigkeit allen denen meinen wärmsten Dank zu sagen, die mir durch Einsendung ihrer Arbeiten geholfen haben, dem altehrwürdigen Crelleschen Journal seinen Platz in der mathematischen Welt zu behaupten. Auch danke ich allen, die mir bei der Herausgabe ratend und helfend zur Seite gestanden haben, ganz besonders herzlich meinem Nachfolger Helmut Hasse, mit dem vereint ich unsere Zeitschrift schon seit dem Jahre 1929 leiten durfte, für seine vorbildliche Arbeit für diesen großen Zweck; gerade das Zusammenwirken mit ihm wird mir eine dauernde schöne Erinnerung an diesen Teil meiner Lebensarbeit bleiben. Ich spreche endlich den Herren des Verlages Walter de Gruyter & Co. meinen herzlichen Dank dafür aus, daß sie mir in diesen langen Jahren immer bereitwillig und verständnisvoll entgegengekommen sind.

Marburg a. d. Lahn, den 12. Juli 1936.

Kurt Hensel.

Vom 176. Bande ab ist mir die Herausgabe des Journals für die reine und angewandte Mathematik übertragen worden. Ich übernehme diese Aufgabe aus den Händen meines verehrten Lehrers Kurt Hensel, unter dessen Leitung ich schon eine Reihe von Jahren bei der Herausgabe des Journals mitgewirkt habe.

Schon am Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn trat Kurt Hensel dieser ältesten deutschen mathematischen Zeitschrift durch seine großen Lehrer nahe. Lange Jahre hindurch hat er dann später die ihm übertragene Herausgabe in pflichtgetreuer und aufopfernder Weise in oft schwerer Zeit geführt. Viele wertvolle Arbeiten hat er für das Journal gewonnen, und auch den überwiegenden Teil seines eigenen der höheren Arithmetik gewidmeten Lebenswerks hat er darin herausgebracht. Für seine fruchtbare Tätigkeit im Dienste dieser Zeitschrift gebührt ihm hohe Anerkennung und warmer Dank seitens der mathematischen Fachwelt.

An alle Freunde des Crelleschen Journals richte ich die aufrichtige Bitte, mich in meiner verantwortungsvollen Aufgabe durch Einsendung von Beiträgen zu unterstützen.

Göttingen, den 12. Juli 1936.

Helmut Hasse.

H. J.

Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper III.

Die Struktur des Meromorphismenrings.
Die Riemannsche Vermutung.

Von *Helmut Hasse* in Göttingen.

Wie in den Teilen I und II dieser Arbeit [1]) sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht 1 über einem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl). Zum Schluß werden wir k speziell als den absolut-algebraischen algebraisch-abgeschlossenen Körper der Primzahlcharakteristik p voraussetzen.

§ 1. Die Normenadditionsformel.

1. Wir beweisen die grundlegende Formel

$$N(\mu + \nu) + N(\mu - \nu) = 2\,N(\mu) + 2\,N(\nu) \tag{1}$$

für beliebige (o. B. d. A. normierte) Meromorphismen μ, ν von K.

Für $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ ist die Formel (1) trivialerweise richtig.

Für $\mu + \nu = 0$ oder $\mu - \nu = 0$ besagt sie

$$N(2\mu) = 4\,N(\mu)\,, \tag{1'}$$

und dies läuft nach dem Normenproduktsatz auf die spezielle Tatsache

$$N(2) = 4 \tag{1a}$$

zurück.

Als Grad von $K/K\mu$ ist $N(\mu)$ gleich dem Grad in K des $\mathfrak{o}$ enthaltenen Primdivisors $\mathfrak{o}\mu = N_\mu \mathfrak{o}$ von $K\mu$. Wir werden den Beweis der Gradrelation (1) dadurch erbringen, daß wir die Divisorenäquivalenzen

$$\frac{\mathfrak{o}(\mu + \nu) \cdot \mathfrak{o}(\mu - \nu)}{(\mathfrak{o}\mu)^2 \cdot (\mathfrak{o}\nu)^2} \sim 1 \text{ für } \mu, \nu, \mu + \nu, \mu - \nu \neq 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\mathfrak{o}(2\mu)}{(\mathfrak{o}\mu)^4} \sim 1 \text{ für } \mu \neq 0 \tag{2'}$$

feststellen, deren letztere durch Anwendung des Meromorphismus μ auf die spezielle

[1]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, Die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung; II, Automorphismen und Meromorphismen, das Additionstheorem; Journ. f. Math. **175** (1936); im folgenden zitiert als H I, H II.

Divisorenäquivalenz

$$\frac{\mathfrak{o}2}{\mathfrak{o}^4} \sim 1 \tag{2a}$$

zurückläuft. Diese Feststellungen werden wir durch den Nachweis der Divisorengleichungen

$$\frac{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\cdot\mathfrak{o}(\mu-\nu)}{(\mathfrak{o}\mu)^2\cdot(\mathfrak{o}\nu)^2} \cong x\mu - x\nu \text{ für } \mu, \nu, \mu+\nu, \mu-\nu \neq 0, \tag{3}$$

$$\frac{\mathfrak{o}(2\mu)}{(\mathfrak{o}\mu)^4} \cong d(x\mu) \text{ für } \mu \neq 0 \tag{3'}$$

erbringen, deren letztere wieder durch Anwendung von μ auf die spezielle Divisorengleichung

$$\frac{\mathfrak{o}2}{\mathfrak{o}^4} \cong dx \tag{3a}$$

zurückläuft.

Wir werden allerdings (3) hier nur unter einer gewissen einschränkenden Voraussetzung über die Inseparabilitätsexponenten $J(\mu)$, $J(\nu)$, $J(\mu+\nu)$, $J(\mu-\nu)$ beweisen, die für den Rückschluß auf die allgemeine Gültigkeit von (1) ausreicht. Für die hier beabsichtigte Anwendung kommt es allein auf die Gradrelation (1) an. Es dürfte aber nicht schwer sein, mit den im Beweis dargelegten Methoden auch die allgemeine Gültigkeit von (3) zu beweisen.

Beim Beweis von (3) und (3a) erfordert der Fall $p = 2$ besondere Betrachtungen. Um die Linienführung des Beweises klar hervortreten zu lassen, werden wir an den Stellen, wo für $p = 2$ eine solche Sonderbetrachtung erforderlich ist, zunächst $p \neq 2$ voraussetzen und dann am Schluß die für $p = 2$ nötigen Ergänzungen nachholen.

2. Wir stellen einige in H II bewiesene oder leicht aus den dortigen Ausführungen zu gewinnende Tatsachen voran, die wir beim Beweis dauernd vor Augen haben müssen.

a) *Der Inseparabilitätsexponent* $J(\mu)$.

Es ist

$$J(\mu) = 1 \rightleftarrows c_\mu \neq 0,$$

wo c_μ der Faktor ist, den das ganze Differential du bei Anwendung von μ bekommt:

$$(du)\mu = c_\mu\, du.$$

Insbesondere für ganzrationale n ist nach dem Additionstheorem für du

$$(du)n = n\, du, \text{ d. h. } c_n = n.$$

Daraus folgt

$$J(n) = 1 \rightleftarrows n \not\equiv 0 \bmod p.$$

Es gilt die Additionsregel

$$J(\mu+\nu) \geqq \operatorname{Min}(J(\mu), J(\nu)).$$

Denn es ist $K\mu \leqq K^{J(\mu)}$, $K\nu \leqq K^{J(\nu)}$, und daher

$$K(\mu+\nu) \leqq K\mu \cdot K\nu \leqq K^{\operatorname{Min}(J(\mu),J(\nu))}.$$

Hiernach und mit Hinblick auf die Produktregel $J(\mu\nu) = J(\mu)\,J(\nu)$ liefert $J(\mu)$ (durch seinen reziproken Wert) eine nichtarchimedische Bewertung des Ringes M der normierten

Meromorphismen. Dabei gilt bekanntlich als formale Folge der genannten Additionsregel die schärfere Regel

$$J(\mu + \nu) = \text{Min}\,(J(\mu), J(\nu)), \quad \text{wenn} \quad J(\mu) \neq J(\nu)\,.$$

Für den in M enthaltenen Teilring Γ der ganzrationalen Meromorphismen n liefert $J(n)$ nach der obigen Feststellung die identische Bewertung, wenn $p = 0$, und eine Potenz der p-adischen Bewertung mit einem festen positiven ganzzahligen Exponenten s:

$$J(n) = p^{sl}, \quad \text{für} \quad n = p^l n_0, \quad n_0 \not\equiv 0 \bmod p\,,$$

wenn $p \neq 0$. Auf die Bestimmung dieses Exponenten s kommen wir später zurück.

b) *Primdivisoren und normierte Primelemente.*

Es ist

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}\mu \rightleftarrows \mu\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\,.$$

Wenn $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}\mu$, so geht $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{q}\mu$ genau zum Exponenten $J(\mu)$ auf; $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}^{J(\mu)}$ ist der $\mathfrak{p}$ enthaltende Primdivisor des zu K absolut-isomorphen maximal-separablen Zwischenkörpers $K_0 = K^{J(\mu)}$ von $K/K\mu$.

Ein Primelement π zu $\mathfrak{p}$ heiße *normiert*, wenn der in π verfügbare konstante Faktor $\neq 0$ so festgelegt ist, daß

$$\frac{d\pi}{du} \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\pi}{du}\,\mathfrak{p} = 1$$

ist. Man beachte, daß diese Normierung, anders als die Normierung der Erzeugenden x, y oder der Meromorphismen μ, nicht auf einen festen Primdivisor $\mathfrak{o}$ bezogen ist, sondern nur auf ein festes ganzes Differential du.

Sei nun $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}\mu$, also $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, und seien π, $\varkappa$ normierte Primelemente zu $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Ist zunächst $J(\mu) = 1$, so ist auch $\varkappa\mu$ ein Primelement zu $\mathfrak{p}$, und es entsteht die Frage nach dem zur Normierung von $\varkappa\mu$ führenden Faktor, d. h. nach dem Zusammenhang zwischen $\varkappa\mu$ und π. Sie wird beantwortet durch die Regel

$$\frac{\varkappa\mu}{\pi} \equiv c_\mu \bmod \mathfrak{p}\,.$$

Man hat nämlich

$$\frac{d(\varkappa\mu)}{du} = c_\mu \frac{(d\varkappa)\mu}{(du)\mu} = c_\mu \frac{d\varkappa}{du}\,\mu,$$

also

$$\frac{d(\varkappa\mu)}{du}\,\mathfrak{p} = c_\mu \frac{d\varkappa}{du}\,\mu\mathfrak{p} = c_\mu \frac{d\varkappa}{du}\,\mathfrak{q} = c_\mu\,.$$

Für beliebige Inseparabilitätsexponenten $J(\mu)$ ergibt sich ein ganz entsprechender Sachverhalt, wenn man $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, π, $\varkappa$, du, c_μ durch die entsprechenden Bildungen

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}^{J(\mu)}, \ \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}^{J(\mu)}, \ \pi_0 = \pi^{J(\mu)}, \ \varkappa_0 = \varkappa^{J(\mu)}, \ du_0, \ c_\mu^{(0)}$$

in $K_0 = K^{J(\mu)}$ ersetzt.

c) *Primdivisoren und konstante Reste von x.*

Bei der eindeutigen Charakterisierung der Primdivisoren $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ durch die konstanten Reste a, b eines normierten Erzeugendenpaares x, y auf Grund der Relation

$$(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (a, b)$$

entsprechen einem gegebenen Rest a von x immer gerade zwei bzgl. $k(x)$ konjugierte (verschiedene oder auch gleiche) Primdivisoren, denn man hat $x - a \cong \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}^2}$. In der Gruppe D_0 ist $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$; einem gegebenen Rest a von x entsprechen also immer zwei in D_0 entgegengesetzte Primdivisoren $\pm\mathfrak{p}$.

3. *Beweis von* (3a) (*für* $p \neq 2$). Bekanntlich ist

$$dx \cong \frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{o}^4},$$

wo $\mathfrak{d}_x$ der Differentendivisor von $K/k(x)$ ist. (3a) läuft also auf

$$\mathfrak{d}_x = \mathfrak{o}2$$

hinaus.

a) $\mathfrak{d}_x$ und $\mathfrak{o}2$ sind jedenfalls aus genau denselben Primdivisoren zusammengesetzt. Denn es ist

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{d}_x \rightleftarrows \mathfrak{p} = -\mathfrak{p} \rightleftarrows 2\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \rightleftarrows \mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}2.$$

b) Ist $p \neq 2$, so ist einerseits jedes $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{d}_x$ genau zur ersten Potenz in $\mathfrak{d}_x$ enthalten, weil dann $\mathfrak{p}$ die Verzweigungsordnung $2 \not\equiv 0 \bmod p$ hat, und andererseits jedes $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}2$ genau zur ersten Potenz in $\mathfrak{o}2$ enthalten, weil dann $J(2) = 1$ ist.

Damit ist (3a) für $p \neq 2$ bewiesen.

4. *Beweis von* (3) (*unter der Voraussetzung* (J)). Wir legen die Voraussetzung

$$(\mathrm{J}) \qquad J(\mu + \nu) = J(\mu - \nu) = \mathrm{Min}\,(J(\mu), J(\nu)) \quad = J(\mu) \text{ (o. B. d. A.)}$$

zugrunde. Um den Beweis möglichst klar hervortreten zu lassen, führen wir ihn zunächst sogar nur unter der Voraussetzung

$$(\mathrm{J}_1) \qquad J(\mu + \nu) = J(\mu - \nu) = 1 \qquad\quad = J(\mu) \text{ (o. B. d. A.)},$$

und geben nachher kurz an, welche Modifikation für den Beweis unter der allgemeinen Voraussetzung (J) erforderlich ist.

Zur Abkürzung sei der in (3) auftretende Quotient

$$\frac{\mathfrak{o}(\mu + \nu) \cdot \mathfrak{o}(\mu - \nu)}{(\mathfrak{o}\mu)^2 \cdot (\mathfrak{o}\nu)^2} = \mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$$

gesetzt.

I. *Gleichheit der reduzierten Nenner von* $x\mu - x\nu$ *und* $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$.

a) Da x den genauen Nenner $\mathfrak{o}^2$ hat, haben $x\mu$, $x\nu$ die genauen Nenner $(\mathfrak{o}\mu)^2$, $(\mathfrak{o}\nu)^2$. Daher kann $x\mu - x\nu$ jedenfalls als gebrochener Divisor mit dem Nennner $(\mathfrak{o}\mu)^2 \cdot (\mathfrak{o}\nu)^2$ und ganzem Zähler geschrieben werden. Dabei können sich höchstens solche Primdivisoren $\mathfrak{p}$ ganz oder teilweise gegen den Zähler wegheben, für die zugleich $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\nu$, also $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ und $\nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ gilt. Auch in dem Divisorenbruch $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ können sich nur diese Primdivisoren $\mathfrak{p}$ *gegen den Zähler ganz* oder teilweise wegheben; denn [2]) soll etwa zugleich $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\mu$ und $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}(\mu + \nu)$ sein, also $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ und $(\mu + \nu)\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, so folgt nach dem Additionstheorem auch $\nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\nu$.

b) Um die Gleichheit der reduzierten Nenner von $x\mu - x\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ zu beweisen, bleibt demnach festzustellen, daß die $\mathfrak{p}$ mit zugleich

---

[2]) Schlüsse dieser Art werden wir im folgenden durchweg stillschweigend vollziehen.

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\mu,\ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}\nu, \text{ also } \mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$$

dieselben Beiträge zu $x\mu - x\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ liefern.

Ist nun zunächst $J(\nu) \neq 1$, so liefert ein solches $\mathfrak{p}$ zu $x\mu - x\nu$ den Beitrag $\mathfrak{p}^{-2J(\nu)}$ und auch zu $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ den Beitrag

$$\frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}^2 \cdot \mathfrak{p}^{2J(\nu)}} = \mathfrak{p}^{-2J(\nu)}.$$

Ist aber auch $J(\nu) = 1$, so sei

$$x = \frac{a}{\omega^2} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

die $\mathfrak{o}$-adische Entwicklung von x nach einem normierten Primelement ω zu $\mathfrak{o}$. Nach dem zuvor Bemerkten ergibt sich daraus die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $x\mu - x\nu$ nach einem normierten Primelement π zu einem $\mathfrak{p}$ der genannten Art wie folgt:

$$x\mu = \frac{a}{(\omega\mu)^2} + \cdots = \frac{1}{c_\mu^2}\frac{a}{\pi^2} + \cdots.$$

$$x\nu = \frac{a}{(\omega\nu)^2} + \cdots = \frac{1}{c_\nu^2}\frac{a}{\pi^2} + \cdots.$$

$$x\mu - x\nu = -\frac{c_\mu^2 - c_\nu^2}{c_\mu^2\, c_\nu^2}\frac{a}{\pi^2} + \cdots.$$

$$= -\frac{(c_\mu + c_\nu)\,(c_\mu - c_\nu)}{c_\mu^2\, c_\nu^2}\frac{a}{\pi^2} + \cdots.$$

$$= -\frac{c_{\mu+\nu}\, c_{\mu-\nu}}{c_\mu^2 c_\nu^2}\frac{a}{\pi^2} + \cdots,$$

letzteres nach dem Additionstheorem für du. Wegen der Voraussetzung (J_1) und $J(\nu) = 1$ sind $c_\mu, c_\nu, c_{\mu+\nu}, c_{\mu-\nu} \neq 0$. Daher liefert $\mathfrak{p}$ zu $x\mu - x\nu$ den Beitrag $\mathfrak{p}^{-2}$. Zu $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ liefert $\mathfrak{p}$ ebenfalls den Beitrag $\mathfrak{p}^{-2}$.

II. *Gleichheit der reduzierten Zähler von $x\mu - x\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$.*

Auf Grund des bereits Bewiesenen brauchen wir nur noch solche Primdivisoren $\mathfrak{p}$ zu betrachten, für die zugleich

$$\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{o}\mu,\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{o}\nu, \quad \text{also} \quad \mu\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o},\ \nu\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$$

ist.

a) Die reduzierten Zähler von $x\mu - x\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ sind jedenfalls aus genau denselben Primdivisoren zusammengesetzt. Denn es ist für die nur noch zu betrachtenden $\mathfrak{p}$

$$(x\mu - x\nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \rightleftarrows x\mu\mathfrak{p} = x\nu\mathfrak{p} \rightleftarrows \mu\mathfrak{p} = \pm\nu\mathfrak{p} \rightleftarrows (\mu \pm \nu)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \rightleftarrows \mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}(\mu \pm \nu).$$

b) Um die Gleichheit der reduzierten Zähler von $x\mu - x\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ zu beweisen, bleibt demnach noch festzustellen, daß die $\mathfrak{p}$ mit zugleich

$$\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{o}\mu,\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{o}\nu,\ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}(\mu + \nu) \text{ oder } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}(\mu - \nu)$$

dieselben Beiträge zu $x\mu - x\nu$ und $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ liefern. Wegen der Symmetrie in $\pm\nu$ genügt es, etwa

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}(\mu - \nu), \text{ also } \mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p}$$

anzunehmen. Sei $\mu\mathfrak{p} = \nu\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ gesetzt; es ist $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{o}$.

Ist dann zunächst

$$\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{o}(\mu + \nu), \text{ also } \mu\mathfrak{p} \neq -\nu\mathfrak{p}, \text{ d. h. } \mathfrak{q} \neq -\mathfrak{q},$$

so lautet die $\mathfrak{q}$-adische Entwicklung von x nach einem normierten Primelement $\varkappa$ zu $\mathfrak{q}$:

$$x = a + a'\varkappa + \cdots \qquad (a' \neq 0),$$

also analog wie vorher die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $x\mu - x\nu$ nach einem normierten Primelement π zu $\mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned} x\mu - x\nu &= (c_\mu - c_\nu)\, a'\pi + \cdots \\ &= c_{\mu-\nu}\, a'\pi + \cdots . \end{aligned}$$

Wegen $c_{\mu-\nu} \neq 0$ liefert daher $\mathfrak{p}$ zu $x\mu - x\nu$ den Beitrag $\mathfrak{p}^1$. Zu $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ liefert $\mathfrak{p}$ ebenfalls den Beitrag $\dfrac{1 \cdot \mathfrak{p}}{1 \cdot 1} = \mathfrak{p}^1$.

Ist aber auch

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{o}(\mu + \nu), \text{ also } \mu\mathfrak{p} = -\nu\mathfrak{p}, \text{ d. h. } \mathfrak{q} = -\mathfrak{q},$$

so hat man entsprechend

$$\begin{aligned} x &= a + a''\varkappa^2 + \cdots \qquad (a'' \neq 0) \\ x\mu - x\nu &= (c_\mu^2 - c_\nu^2)\, a''\pi^2 + \cdots \\ &= (c_\mu + c_\nu)(c_\mu - c_\nu)\, a''\pi^2 + \cdots \\ &= c_{\mu+\nu}\, c_{\mu-\nu}\, a''\pi^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Da auch $c_{\mu+\nu} \neq 0$, liefert daher $\mathfrak{p}$ zu $x\mu - x\nu$ den Beitrag $\mathfrak{p}^2$. Zu $\mathfrak{Q}_{\mu,\nu}$ liefert $\mathfrak{p}$ den Beitrag $\dfrac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}}{1 \cdot 1} = \mathfrak{p}^2$.

Damit ist (3) unter der Voraussetzung (J_1) bewiesen. Der Beweis unter der allgemeinen Voraussetzung (J) kommt ganz entsprechend zustande, indem man die Nachweise für das Übereinstimmen der Beiträge durchweg im Körper $K_0 = K^{J(\mu)}$ statt K führt. In der Tat übertragen sich dabei die wesentlichen Punkte, nämlich die Regel über den Zusammenhang der normierten Primelemente und das Additionstheorem für du als Additionstheorem der in K_0 zugeordneten Faktoren $c_\mu^{(0)}$. Diese Bemerkungen mögen hier genügen; ein näheres Eingehen auf den Beweis dürfen wir uns ersparen.

5. *Allgemeiner Beweis von* (1) (für $p \neq 2$). Ist die Voraussetzung (J) nicht erfüllt, gilt also o. B. d. A.

$$J(\mu - \nu) > \operatorname{Min}(J(\mu), J(\nu)),$$

so ist wegen der schärferen Additionsregel genauer

$$J(\mu - \nu) > J(\mu) = J(\nu)$$

und ferner jedenfalls

$$J(\mu + \nu) \geqq \operatorname{Min}(J(\mu - \nu), J(2)\, J(\nu)),$$

mit Gleichheitszeichen, wenn $J(\mu - \nu) \neq J(2)\, J(\nu)$ ist.

Für $p \neq 2$ ist nun $J(2) = 1$, also gilt das Gleichheitszeichen, und daraus folgt

$$J(\mu + \nu) < J(\mu - \nu).$$

Dann ist aber (nach der schärferen Additionsregel) die Voraussetzung (J) für $\mu + \nu$, $\mu - \nu$ statt μ, ν erfüllt. Nach dem bereits Bewiesenen gilt dann also

$$\frac{\mathfrak{o}(2\mu) \cdot \mathfrak{o}(2\nu)}{(\mathfrak{o}(\mu + \nu))^2 \cdot (\mathfrak{o}(\mu - \nu))^2} \sim 1.$$

Durch Kombination mit (2′) folgt daraus weiter

$$\left(\frac{(\mathfrak{o}\mu)^2 \cdot (\mathfrak{o}\nu)^2}{\mathfrak{o}(\mu+\nu)\cdot\mathfrak{o}(\mu-\nu)}\right)^2 \sim 1\,,$$

also $(2)^2$, und somit (1).

6. Ergänzungen für $p = 2$ sind an zwei Stellen dieses Beweises erforderlich, nämlich einmal im Beweis von (3a) und dann in dem zuletzt ausgeführten Rückschluß auf (1), wenn (J) nicht erfüllt ist.

Zur Vorbereitung dieser Ergänzungen aber auch für spätere Zwecke gehen wir näher auf die *ganzrationalzahligen Meromorphismen* n ein. Die Formel (1) ist für sie auf Grund eines induktiven Schlußverfahrens gleichwertig mit der expliziten Formel

$$N(n) = n^2\,. \tag{4}$$

Wir leiten nun, zunächst unabhängig von dem vorstehenden Beweis, aus dem Ergebnis von H I Aussagen in Richtung auf diese Formel her. Dabei genügt es nach dem Normenproduktsatz, die Fälle $n \not\equiv 0 \bmod. p$ und $n = p^f$ zu betrachten (wobei in letzterem Falle durchweg stillschweigend $p \neq 0$ vorausgesetzt wird). Es ist

$$N(n) = J(n)\,N_0(n).$$

Für den Inseparabilitätsexponenten $J(n)$ haben wir oben bereits

$$J(n) = 1 \quad \text{für} \quad n \not\equiv 0 \bmod. p,$$
$$J(p^f) = p^{sf} \quad \text{für} \quad n = p^f$$

festgestellt, mit einem gewissen festen positiven ganzzahligen Exponenten s. Die reduzierte Norm $N_0(n)$ ist die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{p}$ mit $n\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$; nach H I ist also

$$N_0(n) = n^2 \text{ für } n \not\equiv 0 \bmod. p,$$
$$N_0(p^f) = \begin{Bmatrix} p^f \text{ für } A \neq 0 \\ 1 \text{ für } A = 0 \end{Bmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich

a) für $n \not\equiv 0 \bmod. p$ ein direkter Beweis der Gültigkeit von (4),

b) für $n = p^f$ die Gleichwertigkeit von (4) mit der Aussage

$$J(p^f) = \begin{Bmatrix} p^f \text{ für } A \neq 0 \\ p^{2f} \text{ für } A = 0 \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

d. h. mit der Exponentenbestimmung

$$s = 1 \text{ für } A \neq 0, \quad s = 2 \text{ für } A = 0\,.$$

Für $p \neq 2$ haben wir (1) bereits in voller Allgemeinheit bewiesen und sind also damit auch im Besitz der Tatsachen (4) und (5).

Für $p = 2$ schließen wir folgendermaßen:

Für $\mu = 2$, $\nu = 1$ ist die Voraussetzung (J) (sogar (J_1)) erfüllt. Daher hat man

$$N(3) + N(1) = 2N(2) + 2N(1)\,.$$

Hier wissen wir $N(1) = 1$, sowie auf Grund von a) oben auch $N(3) = 9$. Daraus folgt $N(2) = 4$. Nach b) oben ergibt das

$$J(2) = \begin{Bmatrix} 2 \text{ für } A \neq 0 \\ 2^2 \text{ für } A = 0 \end{Bmatrix},$$

und damit dann auch die allgemeine Gültigkeit von (5) und somit (4).

7. *Ergänzung für $p = 2$ zum Beweis von* (3a). Für $p = 2$ hat auf Grund der (in H I gegebenen) Definition von A die $\mathfrak{o}$-adische Entwicklung von x die Form

$$x = a\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{A}{\omega} + \cdots\right) \qquad (a \neq 0).$$

Hiernach ist $A = 0$ gleichbedeutend damit, daß dx ganz für $\mathfrak{o}$ und somit $dx \cong 1$, $\mathfrak{d}_x = \mathfrak{o}^4$ ist. Damit ergibt sich als Ersatz der für $p = 2$ ungültigen Schlußkette b) des obigen Beweises von (3a) — der Teil a) gilt ja auch für $p = 2$ —:

$$\mathfrak{o}2 = \mathfrak{o}^4 \rightleftarrows J(2) = 2^2 \rightleftarrows A = 0 \rightleftarrows dx \cong 1 \rightleftarrows \mathfrak{d}_x = \mathfrak{o}^4,$$

sowie

$$\mathfrak{o}2 = \mathfrak{o}^2\mathfrak{z}^2 \rightleftarrows J(2) = 2 \rightleftarrows A \neq 0 \rightleftarrows dx \cong \frac{\mathfrak{o}^2\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{o}^4} \rightleftarrows \mathfrak{d}_x = \mathfrak{o}^2\mathfrak{z}^2.$$

Daß im letzteren Falle $\mathfrak{d}_x$ nicht gleich $\mathfrak{o}\mathfrak{z}^3$ oder $\mathfrak{o}^3\mathfrak{z}$ ist, folgt aus der an anderer Stelle [3]) bewiesenen allgemeinen Formel für den Differentendivisor eines zyklischen algebraischen Funktionenkörpers vom Grade p, oder auch einfach aus dem Dedekindschen Differentensatz.

8. *Ergänzung für $p = 2$ zum Rückschluß auf* (1), *wenn* (J) *nicht erfüllt ist.* Nachdem die Gültigkeit von (2′) auch für $p = 2$ feststeht, versagt der obige Rückschluß auf (1), wenn (J) nicht erfüllt ist, bei $p = 2$ nur dann, wenn

$$J(\mu) = J(\nu) < J(\mu + \nu) = J(\mu - \nu) < J(2)\,J(\mu) = J(2)\,J(\nu)$$

ist. Für $A \neq 0$, also $J(2) = 2$ ist das unmöglich; für $A = 0$, also $J(2) = 2^2$ besagt es

$$J(\mu + \nu) = J(\mu - \nu) = 2J(\mu) = 2J(\nu).$$

Jedenfalls ist dann (J) erfüllt, wenn das System

$$\mu, \quad \nu; \quad \mu + \nu, \quad \mu - \nu$$

durch eins der folgenden drei Systeme ersetzt wird

(a)	$\mu + \nu$,	μ;	$2\mu + \nu$,	ν
(b)	$\mu - \nu$,	μ;	$2\mu - \nu$,	$-\nu$
(c)	2μ,	ν;	$2\mu + \nu$,	$2\mu - \nu$.

Kombiniert man die diesen Systemen entsprechenden Divisorenäquivalenzen (2) nach dem Schema $\frac{(a)\,(b)}{(c)}$ und wendet wieder (2′) an, so ergibt sich ersichtlich wieder $(2)^2$, und somit (1).

Damit ist (1) allgemein bewiesen.

§ 2. Die Struktur des Meromorphismenrings.

1. Wir leiten zunächst einige formale Folgen aus dem folgenden Tatbestand her: M ist eine additive abelsche Gruppe, und in M liegt eine Zahlfunktion $N(\mu)$ mit der Funktionalgleichung

$$N(\mu + \nu) + N(\mu - \nu) = 2N(\mu) + 2N(\nu)$$

vor.

---

[3]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934), 42.

Zunächst ergibt sich, den drei Spezialfällen $\nu = 0$, $\mu = 0$, $\mu \pm \nu = 0$ entsprechend, speziell:

$$N(0) = 0\,,$$
$$N(-\nu) = N(\nu)\,,$$
$$N(2\mu) = 4N(\mu)\,.$$

Wir führen nun das Symbol

$$(\mu, \nu) = \frac{N(\mu + \nu) - N(\mu) - N(\nu)}{2}$$

ein. Dafür ergeben sich, der Kommutativität und Assoziativität von M und der Funktionalgleichung von $N(\mu)$ entsprechend, ohne weiteres die folgenden drei Regeln:

(1) $$(\nu, \mu) = (\mu, \nu)\,,$$

(2) $$(\mu, \nu + \varrho) + (\nu, \varrho) = (\mu + \nu, \varrho) + (\nu, \varrho)\,,$$

(3) $$(\mu, -\nu) = -(\mu, \nu)\,.$$

Aus diesen Regeln ergibt sich weiter die Regel:

(4) $$(\mu, \nu + \varrho) = (\mu, \nu) + (\mu, \varrho)\,.$$

Wird nämlich

$$(\mu, \nu, \varrho) = (\mu, \nu + \varrho) - (\mu, \nu) - (\mu, \varrho)$$

gesetzt, so ist nach (1), (2)

$$(\mu, \nu, \varrho) = (\varrho, \mu, \nu)\,.$$

(μ, ν, ϱ) ist also symmetrisch in μ, ν, ϱ. Einerseits ist nun nach (3)

$$(\mu, -\nu, -\varrho) = -(\mu, \nu, \varrho)\,.$$

Andrerseits ist nach (3), (1)

$$(-\mu, \nu, \varrho) = -(\mu, \nu, \varrho)\,,$$

und wegen der festgestellten Symmetrie gilt Entsprechendes auch für ν und ϱ; daher hat man auch

$$(\mu, -\nu, -\varrho) = -(\mu, \nu, -\varrho) = +(\mu, \nu, \varrho)\,.$$

Zusammengenommen ergibt sich hieraus $(\mu, \nu, \varrho) = 0$, d. h. die Regel (4).

Nach (1), (3), (4) hat das Symbol (μ, ν) die formalen Eigenschaften eines inneren Produkts. Insbesondere ist definitionsgemäß

$$(\mu, \mu) = \frac{N(2\mu) - 2N(\mu)}{2} = N(\mu)\,.$$

Die Funktion $N(\mu)$ ist also das zu diesem inneren Produkt gehörige Quadrat. Vermöge der Rechenregeln (1), (4) des inneren Produkts ergibt sich dann die Formel:

(5) $$\begin{aligned} N(m\mu + n\nu) &= (m\mu + n\nu, m\mu + n\nu) = (m\mu, m\mu) + 2(m\mu, n\nu) + (n\nu, n\nu) \\ &= m^2(\mu, \mu) + 2mn(\mu, \nu) + n^2(\nu, \nu) \\ &= m^2 N(\mu) + mn(N(\mu + \nu) - N(\mu) - N(\nu)) + n^2 N(\nu) \end{aligned}$$

für beliebige ganzrationale m, n. [4])

---

[4]) Diese Herleitung der für das Folgende wichtigen Formel (5) verdanke ich einem Hinweis von Herrn Teichmüller. Herr Teichmüller war in der Theorie der allgemeinen linearen metrischen Räume auf die an die Spitze gestellte Funktionalgleichung geführt worden, nämlich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einem solchen Raum das Längenquadrat als Quadrat im Sinne eines inneren Produkts darstellbar ist. Siehe dazu übrigens P. Jordan-J. v. Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. **36** (1935), 721.

2. Wir nehmen jetzt hinzu, daß M ein Ring mit Einselement ist, und daß die Funktion $N(\mu)$ zudem die Eigenschaften hat:

$$N(\mu) \text{ ist ganzrational, } N(\mu) = 0 \rightleftarrows \mu = 0\,,$$
$$N(\mu\nu) = N(\mu)\,N(\nu)\,.$$

Dann ergibt sich zunächst ohne weiteres:

$$N(1) = 1\,,$$
$$N(m) = m^2 \text{ (nach (5))},$$
$$\mathsf{M} \text{ hat keine echten Nullteiler,}$$
$$\mathsf{M} \text{ hat die Charakteristik 0.}$$

Wir beweisen ferner die grundlegende Tatsache:

Jedes Element μ aus M *ist Nullstelle eines quadratischen Polynoms*

$$Q(z) = z^2 - lz + m$$

mit ganzrationalen l, m, nämlich

$$l = 2(\mu, 1) = N(\mu + 1) - N(\mu) - 1\,,$$
$$m = (\mu, \mu) = N(\mu)\,.$$

Zum Beweis definieren wir $\bar{\mu}$ zu μ durch

$$\mu + \bar{\mu} = 2(\mu, 1) = l;$$

Dies $\bar{\mu}$ ist mit μ vertauschbar. Die Behauptung kommt dann auf den Nachweis von

$$\mu\bar{\mu} = m$$

hinaus, und dies wiederum auf den Nachweis von

$$N(\mu\bar{\mu} - m) = 0.$$

Nun gilt allgemein

$$(\mu\xi, \mu\eta) = \frac{N(\mu(\xi+\eta)) - N(\mu\xi) - N(\mu\eta)}{2} = N(\mu)\frac{N(\xi+\eta) - N(\xi) - N(\eta)}{2} = N(\mu)\,(\xi,\eta)\,.$$

Ersetzt man hierin μ durch $m\mu + n\nu$ mit ganzrationalen m, n, so entstehen nach (1), (4) und (5) links und rechts quadratische Formen in m, n; der Vergleich der Koeffizienten von mn ergibt die Formel

$$(\mu\xi, \nu\eta) + (\nu\xi, \mu\eta) = 2(\mu, \nu)\,(\xi, \eta)\,.$$

Daraus folgt insbesondere für $\nu = 1$ die Regel

$$(6) \qquad (\mu\xi, \eta) = l(\xi, \eta) - (\xi, \mu\eta) = (\xi, (l - \mu)\eta) = (\xi, \bar{\mu}\eta)\,.$$

Nun ist nach (5)

$$N(\mu\bar{\mu} - m) = N(\mu\bar{\mu}) - 2m\,(\mu\bar{\mu}, 1) + m^2\,,$$

und hier ist einerseits

$$N(\mu\bar{\mu}) = N(\mu)\,N(\bar{\mu}) = m^2\,,$$

weil nach (5) auch

$$N(\bar{\mu}) = N(l - \mu) = l^2 - 2l\,(\mu, 1) + N(\mu) = l^2 - l^2 + m = m$$

ist, andrerseits nach (6)

$$(\mu\bar{\mu}, 1) = (\bar{\mu}, \bar{\mu}) = N(\bar{\mu}) = m\,,$$

zusammengenommen also in der Tat

$$N(\mu\bar{\mu} - m) = m^2 - 2m^2 + m^2 = 0.\ ^{5})$$

Wir nehmen schließlich hinzu, daß durchweg $N(\mu) \geqq 0$ ist. Dann ergibt sich überdies die Tatsache:

Die Diskriminante des Polynoms $Q(z)$ ist $\leqq 0$, also

$$l^2 \leqq 4m\ .$$

Dies folgt entweder, indem man zum Ausdruck bringt, daß die quadratische Form rechts in (5) durchweg $\geqq 0$ ist, oder aus dem Ausdruck

$$(\mu - \bar{\mu})^2 = -\,(\mu - \bar{\mu})\,(\bar{\mu} - \mu) = -\,(\mu - \bar{\mu})\,\overline{(\mu - \bar{\mu})} = -\,N(\mu - \bar{\mu})$$

für die Diskriminante von $Q(z)$.

3. Für den vollen Ring M existiert (abstrakt, ohne Deutung als Meromorphismen von k) der durch Erweiterung des Teilrings Γ zum Quotientenkörper P entstehende Quotientenring Σ. Da Σ nullteilerfrei ist, ist jedes Teilsystem endlichen Ranges über P eine Divisionsalgebra über P. Nach dem Bewiesenen sind ferner sämtliche nicht zu P gehörigen Elemente aus Σ imaginär-quadratisch über P. Aus dem bekannten Satz über die einzigen Divisionsalgebren vom Grade 2 über Σ ergibt sich also, daß für P nur folgende Möglichkeiten bestehen:

I. Σ *ist der rationale Zahlkörper* P.

II. Σ *ist ein imaginär-quadratischer Zahlkörper über* P, *also* $\Sigma = \mathsf{P}(\delta)$ *mit* $\delta^2 = d < 0$ *in* P.

III. Σ *ist eine imaginär-quadratische Divisionsalgebra über* P, *also* $\Sigma = \mathsf{P}(\delta, \delta')$ *mit* $\delta^2 = d < 0$, $\delta'^2 = d' < 0$ *in* P *und* $\delta\delta' = -\delta'\delta$.

M *selbst ist dann ein Integritätsbereich in* Σ, *der nur aus ganzalgebraischen Elementen besteht und den ganzrationalen Integritätsbereich* Γ *enthält, also eine Ordnung in* Σ.

§ 3. Der Fall eines absolut-algebraischen Konstantenkörpers von Primzahlcharakteristik p.

Sei von jetzt an k der absolut-algebraische algebraisch-abgeschlossene Körper der Primzahlcharakteristik p.

1. Ist $K = k(x, y)$ mit $f(x, y) = 0$ eine normierte Erzeugung von K, so liegen die Koeffizienten von $f(x, y)$ sämtlich in einem endlichen Körper k_0. Ist also $q = p^l$ die Elementzahl von k_0, so liefert die Abbildung

$$(x\pi, y\pi) = (x^q, y^q)$$

einen normierten Meromorphismus π von K.

Wegen $K\pi = K^q$ ist

$$N(\pi) = q,\ J(\pi) = q,\ c_\pi = 0\ .$$

Die quadratische Gleichung für π hat daher die Form

$$Q(\pi) = \pi^2 - l\pi + q = 0\ , \qquad l^2 \leqq 4q.$$

---

[5]) Den Grundgedanken dieses Beweises, der meine ursprüngliche Anwendung des Ostrowskischen Satzes über archimedisch-bewertete Körper ersetzt, verdanke ich Herrn Behrbohm; siehe dessen Note im Anschluß an meine vorläufige Mitteilung in den Göttinger Nachrichten 1935. Die dortige Beweisführung wurde durch Herrn Teichmüller noch etwas durchsichtiger gestaltet, durch Einführung der obigen Regel (6). — Siehe außerdem die Referate von E. Witt in Zbl. **13** (1936), 197—198.

Auch das durch

$$\pi + \bar{\pi} = l$$

definierte konjugierte $\bar{\pi}$ zu π ist ein normierter Meromorphismus von K, da l ein solcher ist. Um $\bar{\pi}$ explizit darzustellen, beachten wir die Relation

$$\bar{\pi}\pi = q,$$

auf Grund deren

$$K > K\pi = K^q > Kq$$

ist; wir wissen dies ja auch schon auf Grund der allgemeinen Tatsache $J(q) = q$ oder q^2. Nach der Definition des Meromorphismenprodukts entsteht dann $\bar{\pi}$ so: Man nehme die durch

$$(x\pi, y\pi) = (x^q, y^q) \to (xq, yq)$$

gelieferte isomorphe Abbildung von $K\pi = K^q$ auf Kq und leite aus ihr durch rückwärtige Anwendung von π eine isomorphe Abbildung π von K auf einen Teilkörper $K\bar{\pi}$ her; das ergibt

$$(x\bar{\pi}, y\bar{\pi}) = ((xq)^{q^{-1}}, (yq)^{q^{-1}}),$$

insbesondere $K\bar{\pi} = (Kq)^{q^{-1}}$. Der Produktrelation

$$\pi\bar{\pi} = q$$

in der anderen Reihenfolge entspricht ebenso die Körperkette

$$K > K\bar{\pi} = (Kq)^{q^{-1}} > Kq\,.$$

Aus dem früheren allgemeinen Ergebnis

$$J(q) = \begin{Bmatrix} q & \text{für } A \neq 0 \\ q^2 & \text{für } A = 0 \end{Bmatrix}$$

folgt wegen $J(\pi) = q$, daß

$$J(\bar{\pi}) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } A \neq 0 \\ q & \text{für } A = 0 \end{Bmatrix}$$

und entsprechend

$$c_{\bar{\pi}} \begin{Bmatrix} \neq 0 & \text{für } A \neq 0 \\ = 0 & \text{für } A = 0 \end{Bmatrix}$$

ist.

2. Es ist von Interesse, das Auftreten der Grenzfälle

a) $\bar{\pi} = \pi$, d. h. $l^2 = 4q$, $l = \pm 2\sqrt{q}$, $\pi = \pm\sqrt{q}$, $\pi^2 = q$

b) $\bar{\pi} = -\pi$, d. h. $l^2 = 0, l = 0, \pi^2 = -q$

näher zu verfolgen; im Falle a) muß natürlich das f in $q = p^f$ gerade sein.

In beiden Fällen ist wegen $l \equiv 0 \bmod p$

$$c_{\bar{\pi}} = c_l - c_\pi = 0\,.$$

Daraus folgt

$$J(\bar{\pi}) \neq 1, \text{ also } J(\bar{\pi}) = q, \text{ und daher } A = 0.$$

Sei umgekehrt $A = 0$. Dann ist $J(q) = q^2$, also $Kq = K^{q^2}$.

Da auch $K\pi^2 = K^{q^2}$ ist, folgt

$$\pi^2 = q\zeta\,,$$

wo ζ ein normierter Automorphismus von K ist. Als Einheit in $\mathsf{P}(\pi)$ ist ζ notwendig eine 2-te, 4-te oder 6-te Einheitswurzel. Wäre aber $\zeta \neq \pm 1$, so wäre π von höherem als zweiten Grade über P. Es folgt also sogar

$$\pi^2 = \pm q\,,$$

d. h. das Vorliegen eines der obigen beiden Grenzfälle a) oder b).

Wir haben damit bewiesen:

Die Grenzfälle a) *oder* b) *treten dann und nur dann auf, wenn* $A = 0$ *ist. Für* $A \neq 0$ *ist* $0 < l^2 < 4q$.

3. Vom Grenzfall a) abgesehen ist der Körper $\mathsf{P}(\pi) > \mathsf{P}$, also ein echter imaginär-quadratischer Zahlkörper. Wir können dann zeigen, daß das volle System $\mathsf{\Sigma} = \mathsf{P}(\pi)$ ist. Da nämlich π ersichtlich mit allen normierten Meromorphismen μ vertauschbar ist, ist für jeden solchen das System $\mathsf{P}(\pi, \mu)$ kommutativ; wegen des Grades ist also $\mathsf{P}(\pi, \mu) = \mathsf{P}(\mu)$.

Damit ist bewiesen:

Ist k *absolut-algebraisch und* $\bar{\pi} \neq \pi$, *so ist der Meromorphismenring* M *eine Ordnung eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers, und zwar eines solchen, in dem* p *in zwei (verschiedene oder gleiche) Primideale zerfällt.*

Insbesondere ist dann die in H II, § 1 untersuchte Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_0$ im allgemeinen zyklisch von der Ordnung 2, erzeugt durch die Spiegelung $\sigma_0 = -1$; nur wenn speziell M die Hauptordnung zur Diskriminante -4 oder -3 ist, ist $\mathfrak{A}_0$ umfassender, nämlich zyklisch von der Ordnung 4 oder 6, erzeugt durch eine 4-te oder 6-te Einheitswurzel ζ in M.

Hiernach bleibt die Frage nach der Struktur des Meromorphismenringes M nur in dem Falle offen, daß bei jeder möglichen Wahl der normierten Erzeugung $K = k(x, y)$ mit $f(x, y) = 0$ und darauf gegründeten Definition von π (mit kleinstmöglichem q) der Grenzfall a) vorliegt, d. h. $\bar{\pi} = \pi$ und somit $\mathsf{P}(\pi) = \mathsf{P}$ ist. Es wäre interessant, allgemein zu entscheiden, von welchem der drei Typen I, II, III der Meromorphismenring M in diesem Falle ist. Das Beispiel $p = 3$, $q = 3^2$, $y^2 = x^3 - 2x - 1$ lehrt jedenfalls, daß der Typus III wirklich vorkommt.

§ 4. Die Riemannsche Vermutung.

1. Der Körper $K_0 = k_0(x, y)$ ist ein algebraischer Funktionenkörper vom Geschlecht 1 über k als Konstantenkörper; denn die Grundgleichung $f(x, y) = 0$ hat Koeffizienten in k_0 und bleibt in der algebraisch-abgeschlossenen Hülle k von k_0 irreduzibel. Die Zetafunktion von K_0 reduziert sich nach Wegdivision der Zetafunktion zum Geschlecht 0 über k_0 auf die Funktion

$$L(s) = 1 - \frac{(q + 1 - N_1)}{q^s} + \frac{q}{q^{2s}}\,,$$

wo N_1 die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von K_0 bezeichnet [6]). Wir setzen $z = q^s$ und

---

[6] Siehe dazu H. Hasse, Über die Kongruenzzetafunktionen, Sitz. Ber. Berlin 1934.

$$q^{2s} L(s) = P(z) = z^2 - (q + 1 - N_1)\, z + q\,.$$

Nach der allgemeinen Theorie der Zetafunktion ist

$$h = L(0) = P(1) = N_1$$

die Klassenzahl (Anzahl der Divisorenklassen nullten Grades) von K_0. Daß hier (für Geschlecht 1) speziell $h = N_1$ ist, sieht man auch direkt daraus, daß nach dem Riemann-Rochschen Satz die h Divisorenklassen nullten Grades von K_0 eindeutig durch die Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ aller N_1 Primdivisoren ersten Grades durch den festen Nennerprimdivisor $\mathfrak{o}$ von x, y repräsentiert sind.

2. Die Nullstellen von $L(s)$ in s entsprechen vermöge $z = q^s$ den beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms $P(z)$ in z, und die *Riemannsche Vermutung* für $L(s)$ besagt, daß die beiden Nullstellen von $P(z)$ den absoluten Betrag $q^{\frac{1}{2}}$ haben, d. h. daß sie konjugiert-komplex (im Grenzfall reell und gleich) sind, oder also auch daß

$$(q + 1 - N_1)^2 \leqq 4q$$

ist.

Wir werden dies dadurch beweisen, daß wir die Identität von $P(z)$ mit dem durch π annullierten quadratischen Polynom

$$Q(z) = z^2 - lz + q$$

beweisen, für das wir ja die entsprechende Aussage über die Nullstellen $\pi, \bar{\pi}$ oder also die Ungleichung

$$l^2 \leqq 4q$$

wissen. Explizit läuft dieser Identitätsnachweis auf die Feststellung der Übereinstimmung

$$l = q + 1 - N_1$$

der beiden allein noch in Betracht zu ziehenden Koeffizienten von z hinaus. Der tiefere Grund für diese Übereinstimmung kommt aber besser heraus, wenn wir den Schluß so einkleiden: Es genügt, das Übereinstimmen von $P(z)$ und $Q(z)$ für irgendeinen Wert $z \neq 0, \infty$ festzustellen. Wir nehmen $z = 1$ (also $s = 0$).

Einerseits ist, wie schon gesagt

$$P(1) = h\,.$$

Andererseits ist

$$Q(z) = (\pi - z)\,(\bar{\pi} - z),$$

also

$$Q(1) = N(\pi - 1).$$

Der Beweis der Riemannschen Vermutung läuft also auf die Feststellung

$$N(\pi - 1) = h$$

hinaus.

3. Der Beweis dieser Tatsache kann auf Grund unserer Theorie sehr einfach und durchsichtig erbracht werden.

Einerseits ist

$$c_{\pi - 1} = c_\pi - 1 = 0 - 1 \neq 0,$$

also

$$J(\pi - 1) = 1 ,$$

und daher

$$N(\pi - 1) = N_0(\pi - 1)$$

die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(\pi - 1)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$$

in der Gruppe D_0.

Andererseits ist $h = N_1$ die Anzahl derjenigen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, die bereits Primdivisoren ersten Grades von K_0 sind. Dies ist für den Bezugsprimdivisor $\mathfrak{o}$ nach der Konstruktion von K_0 der Fall. Für ein $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ mit

$$(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (a, b)$$

bedeutet es, daß die Elemente a, b aus k bereits in k_0 liegen, oder also

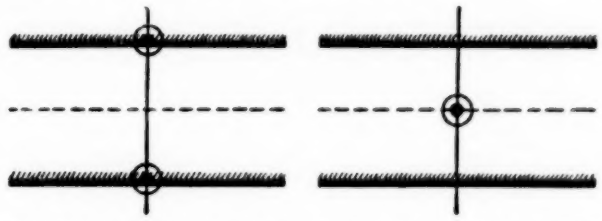
$$(a^q, b^q) = (a, b)$$

erfüllen. Diese Bedingung ist aber auf Grund der Definition des Meromorphismus π und nach früher entwickelten Regeln der Reihe nach gleichbedeutend mit

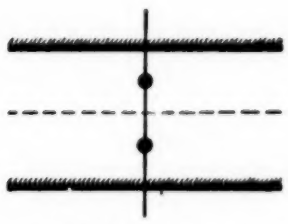
$$\begin{gathered}((x\mathfrak{p})^q, (y\mathfrak{p})^q) = (x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) ,\\ ((x\pi)\,\mathfrak{p}, (y\pi)\,\mathfrak{p}) = (x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) ,\\ (x(\pi\mathfrak{p}), y(\pi\mathfrak{p})) = (x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) ,\\ \pi\mathfrak{p} = \mathfrak{p} ,\\ (\pi - 1)\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o} .\end{gathered}$$

Daher ist auch h gleich der Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in der Gruppe D_0.

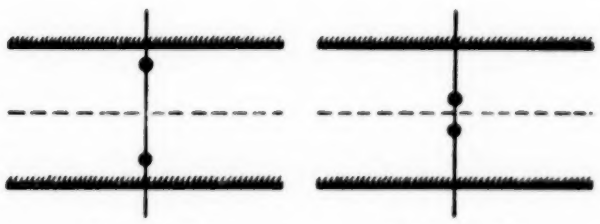
4. Die damit bewiesene Riemannsche Vermutung besagt, daß die beiden konjugierten Meromorphismen $\pi, \bar{\pi}$ formal als die Nullstellen von $L(s)$ (in $z = q^s$) angesehen



Grenzfall a) mit $\bar{\pi} = \pi = +\sqrt{q}$. Grenzfall a) mit $\bar{\pi} = \pi = -\sqrt{q}$.



Grenzfall b), $\bar{\pi} = -\pi$.



Allgemeiner Fall mit $2\sqrt{q} > \pi + \bar{\pi} > 0$. Allgemeiner Fall mit $-2\sqrt{q} < \pi + \bar{\pi} < 0$.

werden können. Da die Relation $P(\pi) = 0$ mit dem Bestehen der Identität

$$P(\pi)\mathfrak{p} = \pi^2\mathfrak{p} - (q + 1 - N_1)\,\mathfrak{p} + q\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$$

in der Divisorenklassengruppe D_0 von K gleichbedeutend ist, kann die Riemannsche Vermutung auch in der folgenden merkwürdigen Form ausgesprochen werden:

Ersetzt man in dem $L(s)$ zugrundeliegenden Polynom $P(z)$ die Variable $z = q^s$ durch den Operator π, so entsteht ein Nulloperator $P(\pi)$ der Divisorenklassengruppe D_0 von K.

5. Insbesondere entsprechen den in § 3 hervorgehobenen Grenzfällen a), b) die aus den ersten drei der vorstehenden Figuren ersichtlichen speziellen Lagen der Nullstellen von $L(s)$ im Periodenstreifen $0 \leqq \Im(s) < \dfrac{2\pi i}{\log q}$ der s-Ebene auf der Geraden $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$, während die vierte und fünfte Figur die Lage im allgemeinen Fall veranschaulichen. Dabei deutet ● eine einfache Nullstelle, ⊙ eine zweifache Nullstelle an.

Wir sind damit am Ziel unserer Untersuchung angelangt.

Göttingen, den 22. November 1935.

Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome nach einem Primzahlmodul.

Von *Erik L. Petterson* in Stockholm.

O. Ore [1]) hat folgenden Satz auf idealtheoretischem Wege bewiesen:
Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t - a \pmod{p}.$$

Es sei Ind $a = d$ für irgendeine Primitivwurzel für den Primzahlmodul p, und p gehöre mod t zum Exponenten h, so daß also

$$\frac{p^h - 1}{t} = k$$

eine ganze Zahl ist. Weiter sei δ der größte gemeinsame Teiler von $p - 1$ und k, δ_1 der größte gemeinsame Teiler von $\frac{p-1}{\delta}$ und d. Dann kann $f(x) \bmod p$ nur dann durch eine Primfunktion m-ten Grades mit $m \equiv 0 \pmod{h}$ teilbar sein, wenn m von der Form

$$m = s \frac{p-1}{\delta\,\delta_1} h$$

ist, wo s eine ganze Zahl bedeutet.

Im folgenden werde ich einen analogen und etwas schärferen Satz für das allgemeinere Polynom $F(x) = f(g(x)^m)$ ableiten, wo $f(x) \bmod p$ irreduzibel ist, und auch die Existenz des fraglichen Faktors beweisen. Das Oresche Polynom folgt aus $f(g(x)^m)$ für $f(x) = x - a$. Beim Beweise werde ich nur die Grundgesetze der Theorie der imaginären Kongruenzwurzeln anwenden und im übrigen ganz elementare Beziehungen benutzen, die ich in den ersten Sätzen zusammengefaßt habe. Mittels einer rekurrenten Reihe und der Untersuchungen einer früheren Arbeit [2]) wird schließlich ein Irreduzibilitätskriterium (Satz 9) abgeleitet.

Satz 1. *Es sei $m > 0$ eine ganze Zahl mit der Primzahlzerlegung $m = \prod_{\nu=1}^{N} q_\nu^{n_\nu}$ und $a \neq 1$ eine beliebige ganze Zahl. Ist dann $q_\nu \mid (a-1)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, N$ und v ein Teiler von $a - 1$ mit $(m, v) = 1$, ferner $4 \nmid m$, wenn $4 \nmid (a-1)$ ist, so gilt die*

---

[1]) O. Ore, Über die Reduzibilität von algebraischen Gleichungen, Skrifter Norske Vid. Akad. Oslo 1923, Nr. 1.

[2]) E. L. Petterson, Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes, Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 194—200.

Kongruenz

$$a^m \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m(a-1)}{v}\right) \tag{1}$$

mit m als Minimalexponenten.

Ist umgekehrt $a \neq 1$ eine ganze Zahl, die mod $\frac{m(a-1)}{v}$, *wo $v \mid m(a-1)$ ist, zum Exponenten m gehört, so gilt $q_\nu \mid (a-1)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, N$; $(m, v) = 1$ und $4 \nmid m$, wenn $4 \nmid (a-1)$ ist.*

Beweis. In der Entwicklung

$$\frac{a^m - 1}{m(a-1)} = \sum_{n=1}^{m} K_n (a-1)^{n-1} \tag{2}$$

ist

$$K_n = \frac{1}{n}\binom{m-1}{n-1} = \frac{1}{m}\binom{m}{n}.$$

Es sind also mK_n und nK_n ganze Zahlen, so daß, wenn $K_n = \frac{r}{s}$ in reduzierter Form geschrieben wird, $s \mid m$ und $s \mid n$ ist. Damit nun $K_n(a-1)^{n-2}$ ganz ist, muß $s \mid (a-1)^{n-2}$ sein. Wegen $s \mid m$ ist $s = \prod_\nu q_\nu^{\beta_\nu}$. Da nach den Voraussetzungen des Satzes jedes $q_\nu \mid (a-1)$ ist, ist sicher $s \mid (a-1)^{n-2}$, wenn jedes $\beta_\nu \leqq n-2$ ist. Dies ist aber, da $s \mid n$ ist, für $n > 3$ erfüllt. Andernfalls wäre nämlich

$$s \geqq q_\nu^{\beta_\nu} \geqq 2^{\beta_\nu} > 2^{n-2} \geqq n \quad \text{für} \quad n > 3.$$

Für $n = 3$ aber ist

$$K_n (a-1)^{n-2} = \frac{(m-1)(m-2)(a-1)}{2 \cdot 3}$$

ebenfalls ganz. Denn es ist $2 \mid (m-1)(m-2)$ und entweder auch $3 \mid (m-1)(m-2)$ oder $3 \mid m$. Dann ist aber nach Voraussetzung auch $3 \mid (a-1)$. Aus (2) folgt also

$$\frac{a^m - 1}{m(a-1)} = 1 + \frac{(m-1)(a-1)}{2} + K(a-1), \tag{3}$$

wo K eine ganze Zahl ist. Da ferner auf Grund der Voraussetzungen m und a nicht beide gerade sein können, gilt jedenfalls die Kongruenz (1) für m.

Es ist noch zu zeigen, daß m Minimalexponent in der Kongruenz (1) ist. Es möge a zum Exponenten m' mod $\frac{m(a-1)}{v}$ gehören; dann ist m' ein Teiler von m. Setzt man $m = m'm''$, so erhält man, da wegen $m' \mid m$ Satz 1 auch auf m' angewandt werden kann, aus (3)

$$\frac{v}{m''}\left(1 + \frac{(m'-1)(a-1)}{2} + K'(a-1)\right) = \frac{v(a^{m'}-1)}{m'm''(a-1)} = \text{ganze Zahl}$$

nach Definition von m'. Hierbei bedeutet K' eine ganze Zahl.

Aus $m = m'm''$ und den Voraussetzungen über m folgt $(m'', v) = 1$. Also gilt

$$m'' \Big| \left(1 + \frac{(m'-1)(a-1)}{2} + K'(a-1)\right).$$

Die Zahl in der Klammer heisse A. Offenbar hat A keinen Primteiler mit $a-1$ gemeinsam außer eventuell den Primteiler 2. Da ferner jeder Primteiler von m'' auch Teiler von m und folglich auch von $a-1$ ist, muß m'' die Form $m''=2^f\,(f\geqq 0)$ haben.

Ist nun $4\,|\,(a-1)$, so ist A ungerade, also $m''=1$.

Ist $2\nmid(a-1)$, so ist m ungerade, also auch m'' ungerade und demnach $m''=1$.

Ist schließlich $4\nmid(a-1)$, aber $2\,|\,(a-1)$, so ist nach Voraussetzung $4\nmid m$ und folglich wenigstens eine der Zahlen m' und m'' ungerade. Ist m'' ungerade, so ist $m''=1$. Ist m' ungerade, so ist A ungerade und also wiederum $m''=1$.

In sämtlichen Fällen ist also $m''=1$, d. h. $m=m'$. Daher ist m in (1) Minimalexponent.

Um die Umkehrung von Satz 1 zu zeigen, nehme ich an $(m,v)=g$, $\dfrac{m}{g}=m'm''$, wo $(m',a-1)=1$ und jeder Primteiler von m'' auch Teiler von $a-1$ ist. Nach Voraussetzung ist $v\,|\,m(a-1)$, mithin

$$\frac{v}{g}\,\Big|\,(a-1),\quad \left(m',\frac{m''(a-1)}{\dfrac{v}{g}}\right)=1,\quad \frac{m}{g}\,\Big|\,(a^m-1).$$

Hieraus folgt $\left(\dfrac{m}{g},\,a\right)=1$, $(m',a)=1$ und demnach

$$a^{\varphi(m')}\equiv 1\pmod{m'}. \tag{4}$$

Schließlich ergibt sich

$$a^{m''}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,\frac{m''(a-1)}{\dfrac{v}{g}}\right). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt wegen der Teilerfremdheit der Moduln

$$a^{\varphi(m')m''}\equiv 1\,\left(\mathrm{mod}\,\frac{m(a-1)}{v}\right).$$

Da aber m der Minimalexponent ist, folgt

$$\varphi(m')\,m''\geqq m=g\,m'\,m'',\qquad \varphi(m')\geqq gm',$$

also

$$m'=1,\qquad g=1.$$

Dies liefert $(m,v)=1$ und zeigt, daß jeder Primteiler von m auch Teiler von $a-1$ ist.

Ist schließlich, $4\,|\,m$ aber $4\nmid(a-1)$, so gilt nach (3)

$$\frac{a^{\frac{m}{2}}-1}{\dfrac{m(a-1)}{v}}=\frac{v}{2}\left(1+\frac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)(a-1)}{2}+K''(a-1)\right), \tag{6}$$

wo K'' eine ganze Zahl und wegen $4\,|\,m$ auch $2\,|\,(a-1)$ ist.

Weil $\dfrac{m}{2}$ gerade und $4\nmid(a-1)$ ist, muß der Ausdruck in der Klammer gerade

und daher die rechte Seite von (6) eine ganze Zahl sein. Dies bedeutet

$$a^{\frac{m}{2}} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\,\frac{m(a-1)}{v}\right)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß m Minimalexponent ist. Also ist $4 \nmid m$, wenn $4 \nmid (a-1)$ ist.

In manchen Fällen ist es besser, Satz 1 in der folgenden Formulierung heranzuziehen:

Satz 2. *Es seien a und P ganze Zahlen, $P > 0$, und $P = \prod_{\nu=1}^{L} q_\nu^{n_\nu}$ die Primzahlzerlegung von P. Es sei ferner $(P, a-1) = g$, $q_\nu \mid (a-1)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, L$ und $4 \nmid \frac{P}{g}$, wenn $4 \nmid (a-1)$ ist. Dann gilt die Kongruenz*

$$a^{\frac{P}{g}} \equiv 1 \pmod{P}$$

mit $\frac{P}{g}$ als Minimalexponent. Wenn umgekehrt irgendeine Zahl a mod P zum Exponenten $\frac{P}{g}$ mit $g \mid P$ gehört und $P = \prod_{\nu=1}^{L} q_\nu^{n_\nu}$ die Primzahlzerlegung von P ist, so gilt $q_\nu \mid (a-1)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, L$, ferner $(P, a-1) = g$ und $4 \nmid \frac{P}{g}$, wenn $4 \nmid (a-1)$ ist.

Diese Formulierung ergibt sich aus Satz 1 für $m = \frac{P}{g}$, $\frac{a-1}{g} = v$.

Satz 3. *Es seien a, P_1 und P_2 beliebige ganze Zahlen und $(a, P_1) = (a, P_2) = 1$, ferner k und h die Minimalexponenten der Kongruenzen $a^k \equiv 1 \pmod{P_1}$ und $(a^k)^h \equiv 1 \pmod{P_2}$, schließlich $(P_1 P_2, a^{kh} - 1) = d$. Dann ist $kh \frac{P_1 P_2}{d}$ Minimalexponent der Kongruenz $a^{kh\frac{P_1 P_2}{d}} \equiv 1 \pmod{P_1 P_2}$.*

Bemerkung. Aus diesem Satz lassen sich analoge Sätze für eine beliebige Anzahl n von Moduln $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ableiten. Die Bedingungen können dabei symmetrisch aufgestellt werden.

Beweis. Es ist zunächst klar, daß der Minimalexponent, zu welchem $a \pmod{P_1 P_2}$ gehört, ein Vielfaches von kh ist Daher genügt es, zu zeigen, daß a^{kh} zum Exponenten $\frac{P_1 P_2}{d} \pmod{P_1 P_2}$ gehört. Ferner ist aber jeder Primfaktor von $P_1 P_2$ auch Teiler von $a^{kh} - 1$, und da aus $\left(P_1, \frac{a^{kh}-1}{P_2}\right) = d'$ folgt $d' = \frac{d}{P_2}$ und demnach $\frac{P_1 P_2}{d} = \frac{P_1}{d'}$ ist, so bleibt nach Satz 2 nur noch zu zeigen, daß $4 \nmid \frac{P_1}{d'}$, wenn $4 \nmid (a^{kh} - 1)$ ist. Aus $4 \nmid (a^{kh} - 1)$ folgt aber unmittelbar $4 \nmid P_1$ und also $4 \nmid \frac{P_1}{d'}$.

Unter einem gemeinsamen Exponenten der Wurzeln ξ_ν eines normierten ganzzahligen Polynoms $f(x)$ vom Grade k in bezug auf eine ganze Zahl E als Modul wird im

folgenden eine Zahl P verstanden, die den Kongruenzrelationen

$$\xi_\nu^P = 1 + EM(\xi_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

genügt, wo $M(x)$ ein ganzzahliges Polynom ist. Die Relationen geben also

$$\xi_\nu^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

Wesentlich ist dabei, daß $M(x)$ für alle ξ_ν dasselbe ist, was direkt folgt, wenn $f(x)$ irreduzibel ist. Für ein solches P gilt folgender Satz:

Satz 4. *Ist P nach dem Modul $E > 1$ der kleinste gemeinsame Exponent der Wurzeln eines normierten ganzzahligen Polynoms $f(x)$ und $m > 0$ eine beliebige ganze Zahl, so ist mP der kleinste gemeinsame Exponent der Wurzeln des Polynoms $F(x) = f(x^m)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, daß die Diskriminante von $f(x)$ von 0 verschieden ist. Der Grad von $f(x)$ sei k, und die Wurzeln von $F(x)$ seien mit ξ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, mk)$ bezeichnet.

Unmittelbar klar ist, daß mP ein gemeinsamer Exponent der Wurzeln ξ_ν von $F(x) = f(x^m)$ ist. Der kleinste gemeinsame Exponent muß demnach von der Form $m'P'$ sein, wo $m' \mid m$ und $P' \mid P$ ist. Für diesen ist

$$\xi_\nu^{m'P'} \equiv 1 \pmod{E},$$

folglich erst recht

$$(\xi_\nu^m)^{P'} \equiv 1 \pmod{E}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, mk.$$

Die ξ_ν^m sind nun die Wurzeln von $f(x)$, und da P ein Minimalexponent dieser Wurzeln ist, so folgt

$$P' = P.$$

Der kleinste gemeinsame Exponent mod E für alle ξ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, mk)$ ist also gleich $m'P$.

Ist $\left(\frac{m}{m'}, P\right) = d$, so ist $\frac{m}{m'd}$ ganz, und man erhält

$$1 \equiv \xi_\nu^{\frac{m}{m'd} m'P} = (\xi_\nu^m)^{\frac{P}{d}} \pmod{E}.$$

Da P Minimalexponent ist, muß $d = 1$ sein und demnach

$$\left(\frac{m}{m'}, P\right) = 1.$$

Ich benutze nun die bekannten Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{mk} \frac{\xi_\nu^l}{F'(\xi_\nu)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l = 0, 1, 2, \ldots, mk-2 \\ 1 & \text{für } l = mk-1, \end{cases}$$

und führe eine Zahlenfolge τ_n ein, die durch

$$\tau_n = \sum_{\nu=1}^{mk} \frac{\xi_\nu^{mk-2}}{F'(\xi_\nu)} \xi_\nu^n$$

definiert ist. Für τ_n gilt demnach

$$\tau_{-(mk-2)} = \tau_{-(mk-3)} = \cdots = \tau_0 = 0, \qquad \tau_1 = 1,$$

sowie die Rekursionsformel

$$\tau_n + a_1 \tau_{n-m} + a_2 \tau_{n-2m} + \cdots + a_k \tau_{n-km} = 0,$$

die dem Polynom

$$F(x) = (x^m)^k + a_1(x^m)^{k-1} + \cdots + a_k$$

entspricht. Es folgt

$$\tau_n = 0 \text{ für alle } n \text{ mit } n \not\equiv 1 \pmod m,$$
$$\tau_n \text{ ganz für alle } n \geqq -(mk-2).$$

Für die ξ_ν war nun bereits gezeigt:

$$\xi_\nu^{m'P} = 1 + EN(\xi_\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, mk,$$

wo $N(x)$ ein ganzzahliges Polynom

$$N(x) = b_0 x^{mk-1} + b_1 x^{mk-2} + \cdots + b_{mk-1}$$

ist. Es wird dann

$$\tau_n - \tau_{n-m'P} = \sum_{\nu=1}^{mk} \frac{\xi_\nu^{mk-2}}{F'(\xi_\nu)} \xi_\nu^{n-m'P} (\xi_\nu^{m'P} - 1) = E \sum_{\nu=1}^{mk} \frac{\xi_\nu^{mk-2}}{F'(\xi_\nu)} \xi_\nu^{n-m'P} N(\xi_\nu)$$

und folglich

$$\tau_n - \tau_{n-m'P} = E \sum_{\lambda=1}^{mk} b_{mk-\lambda}\, \tau_{n-m'P+\lambda-1}.$$

Hieraus erhält man

$$\tau_n \equiv \tau_{n-m'P} \pmod E$$

für alle $n \geqq m'P - (mk-2)$. Wegen $\left(\frac{m}{m'}, P\right) = 1$ können zwei positive Zahlen U und V so bestimmt werden, daß

$$U\frac{m}{m'} - VP = 1$$

ist. Ist nun m eine Primzahl und $m' \neq m$, so ist $m' = 1$. Dann ist P eine Periode für die τ_n, und man erhält

$$\tau_{Um} \equiv \tau_{Um-VP} \equiv \tau_1 = 1 \pmod E$$

im Widerspruch zu $\tau_{Um} = 0$. Also muß $m' = m$ sein. Ist m eine zusammengesetzte Zahl, $m = \prod_{\nu=1}^{M} q_\nu$ mit gleichen oder verschiedenen Primzahlen q_ν, so ergibt sich $m' = m$ durch sukzessives Ersetzen von x durch x^{q_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, M)$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Es sei nun ξ eine Wurzel des Polynoms $f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$, dann gilt die Relation

$$\xi^n = -\sum_{\lambda=1}^{k} (a_\lambda \xi^{k-1} + a_{\lambda+1} \xi^{k-2} + \cdots + a_k \xi^{\lambda-1})\, \tau_{n-k-\lambda+2}. \tag{7}$$

Nach der Definition von τ_n ist nämlich diese Beziehung klar für z. B. $n = k$; sie läßt sich dann allgemein durch Schluß von $n-1$ auf n ableiten. Ist

$$\tau_n \equiv \tau_{n-P} \pmod E$$

für alle hinreichend großen $n \geqq k$, so folgt also

$$\xi^P \equiv 1 \pmod E. \tag{8}$$

Sind nun $f(x)$ und $f_1(x)$ identisch kongruent mod E (und auch $f_1(x)$ normiert), so muß für zugehörige τ_n und τ_n' gelten

$$\tau_n \equiv \tau_n' \pmod{E}$$

für alle $n \geqq -(k-2)$. Damit ist gezeigt, daß $f(x)$ und $f_1(x)$ denselben kleinsten gemeinsamen Exponenten mod E für ihre Wurzeln haben müssen, wenn ihre Diskriminanten von 0 verschieden sind.

Im folgenden soll nun E durch eine Primzahl p ersetzt werden, und es sei $f(x)$ irreduzibel mod p. Ferner sei

$$f(x^q) \equiv \prod_{\lambda=1}^{N} B_\lambda(x) \pmod{p},$$

wo q eine Primzahl $\neq p$ ist und wo alle $B_\lambda(x)$ Primfunktionen mod p sind. Aus $p \neq q$ folgt, daß die Diskriminante von $F(x) = f(x^q)$ durch p nicht teilbar ist. Dieses gilt demnach auch für die Diskriminante von $F_1(x) = \prod_{\lambda=1}^{N} B_\lambda(x)$. Gehört $f(x)$ mod p zum Exponenten P, so müssen ja alle Exponenten P_λ, zu denen die $B_\lambda(x)$ gehören, Vielfache von P sein. Ist nämlich $\xi^{(\lambda)}$ eine Wurzel von $B_\lambda(x)$, so gilt $\xi^{(\lambda)P_\lambda} \equiv 1 \pmod{p}$ und also

$$\left(\xi^{(\lambda)q}\right)^{P_\lambda} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Da $\xi^{(\lambda)q}$ aber als eine imaginäre Kongruenzwurzel von $f(x)$ betrachtet werden kann und demnach mod p zu P gehört, so folgt

$$P \mid P_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, N.$$

Nach Satz 4 ist qP der kleinste gemeinsame Exponent von $F(x) = f(x^q)$ und folglich auch von $F_1(x) = \prod_{\lambda=1}^{N} B_\lambda(x)$. Mithin muß wenigstens ein Faktor $B_\lambda(x)$ zum Exponenten qP mod p gehören.

Ist nun $p \nmid m$ und $m = \prod_{\nu=1}^{M} q_\nu$ mit gleichen oder verschiedenen Primzahlen q_ν, so folgt durch sukzessives Ersetzen von x durch x^{q_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots, M$, daß $F(x) = f(x^m)$ *wenigstens einen Faktor* mod p *enthält, der* mod p *zum Exponenten* mP *gehört.*

Satz 5. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ normierte ganzzahlige Polynome und $f(x)$ außerdem irreduzibel* mod p *und vom Grade k, so kann das Polynom $F(x) = f(g(x))$ nur solche Faktoren* mod p *enthalten, deren Gradzahlen Vielfache von k sind.*

Beweis. Es sei

$$F(x) \equiv A_r(x) B(x) \pmod{p},$$

wo $A_r(x)$ ein mod p irreduzibles Polynom vom Grade r ist. Ist dann ξ eine Wurzel von $A_r(x)$, also $A_r(\xi) = 0$, so folgt

$$g(\xi)^{p^r-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Aus $F(x) = f(g(x))$ ergibt sich ferner, daß $g(\xi)$ eine Kongruenzwurzel (reell oder komplex) des irreduziblen Polynoms $f(x)$ ist. Gehört daher $g(\xi)$ mod p zum Exponenten P,

$$g(\xi)^P \equiv 1 \pmod{p},$$

so folgt

$$p^r \equiv 1 \pmod{P}.$$

Außerdem gehört aber p auch zu der Gradzahl k des Polynoms $f(x)$ mod P, d. h.

$$p^k \equiv 1 \pmod{P}.$$

Also ist

$$k \mid r.$$

Aus den Sätzen 4 und 5 ergibt sich nun folgender Satz:

Satz 6. *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ normierte ganzzahlige Polynome, $f(x)$ irreduzibel* mod p *und vom Grade k. Gehört dann p^k* mod *einer ganzen Zahl m zum Exponenten h,*

$$(p^k)^h \equiv 1 \pmod{m},$$

so muß das Polynom $F(x) = f(g(x)^m)$ wenigstens einen irreduziblen Faktor mod p *von einem Grade, der ein Vielfaches von kh ist, enthalten.*

Beweis. Nach Satz 5 genügt es, den Satz für $f(x^m)$ zu beweisen. Ferner muß die Gradzahl r des fraglichen Faktors sicher von der Form $r = kr_1$ sein. Gehört $f(x)$ mod p zum Exponenten P, so muß $f(x^m)$ nach Satz 4 und den danach bewiesenen Beziehungen wenigstens einen irreduziblen Faktor mod p enthalten, der mod p zum Exponenten mP gehört. Man hat also

$$mP \mid (p^{kr_1} - 1)$$

und demnach

$$m \mid ((p^k)^{r_1} - 1).$$

Da p^k mod p zu h gehört, folgt

$$h \mid r_1 \quad \text{und} \quad kh \mid r.$$

Satz 7. *Es sei das Polynom $f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$ irreduzibel* mod p, $\frac{p^k - 1}{v_k}$ *der Exponent, zu welchem die Wurzeln von $f(x)$* mod p *gehören, und $g(x)$ ein beliebiges, normiertes, ganzzahliges Polynom. Es sei ferner $m > 0$ eine ganze Zahl mit der einzigen Bedingung $p \nmid m$, h Minimalexponent der Beziehung $m \mid (p^{kh} - 1)$ und d_k der größte gemeinsame Teiler von $\frac{p^k - 1}{v_k}$ und $\frac{p^{kh} - 1}{m}$, d. h. $\left(\frac{p^k - 1}{v_k}, \frac{p^{kh} - 1}{m}\right) = d_k$. Dann muß das Polynom $F(x) = f(g(x)^m)$ wenigstens einen irreduziblen Faktor vom Grade r* (mod p) *enthalten, wo r von der Form $r = i\frac{p^k - 1}{d_k v_k} kh$ ist (i ganze Zahl). Für $g(x) = x$ gibt es einen Faktor* mod p *vom Grade $r = \frac{p^k - 1}{d_k v_k} kh$.*

Beweis. Nach Satz 4 und den danach bewiesenen Beziehungen enthält das Polynom $F_1(x) = f(x^m)$ wenigstens einen irreduziblen Faktor mod p mit Wurzeln, die mod p zum Exponenten $\frac{m(p^k - 1)}{v_k}$ gehören. Die Gradzahl dieses Faktors sei r_1. Es gilt also

$$p^{r_1} \equiv 1 \left(\mod \frac{m(p^k - 1)}{v_k}\right)$$

mit r_1 als Minimalexponent.

Da $\frac{p^k-1}{v_k}$ der Minimalexponent für die Wurzeln von $f(x) \bmod p$ sein soll, folgt $p^k \equiv 1 \left(\bmod \frac{p^k-1}{v_k}\right)$ mit k als Minimalexponent. Nach Satz 3 für $a=p$, $P_1=\frac{p^k-1}{v_k}$, $P_2=m$ und $d=d_k m$ ist daher $\frac{p^{kh}-1}{d_k v_k} kh$ Minimalexponent der Kongruenz

$$p^{\frac{p^k-1}{d_k v_k} kh} \equiv 1 \left(\bmod \frac{m(p^k-1)}{v_k}\right).$$

Folglich ist

$$r_1 = \frac{p^k-1}{d_k v_k} kh.$$

Wenn in dem irreduziblen Faktor vom Grade r die Variable x durch $g(x)$ ersetzt wird, erhält man ein Polynom, dessen irreduzible Faktoren mod p nach Satz 5 sämtlich Gradzahlen haben, die Vielfache von r_1 sind. Das Polynom $F(x)=f(g(x)^m)$ hat also wenigstens einen irreduziblen Faktor mod p, dessen Gradzahl r die Form

$$r = ir_1 = i\frac{p^k-1}{d_k v_k} kh$$

hat, wo i ganz ist.

Satz 8. *Die Gradzahlen sämtlicher* mod p *irreduziblen Faktoren des Polynoms* $F(x)=f(g(x)^m)$ *von Satz* 7, *die Vielfache von* kh *sind, müssen sogar Vielfache von* $\frac{p^k-1}{d_k v_k} kh$ *sein. Für* $g(x)=x$ *sind diese Gradzahlen gleich* $\frac{p^k-1}{d_k v_k} kh$.

Beweis. Es genügt, den Satz für $F_1(x)=f(x^m)$ zu beweisen. Es sei $m=m'm''$, wo m' der größte Teiler von m mit

$$\left(m', \frac{p^k-1}{v_k}\right) = 1$$

ist. Für eine Wurzel ξ irgendeines mod p irreduziblen Faktors von $F_1(x)$ gilt

$$(\xi^m)^{\frac{p^k-1}{v_k}} \equiv 1 \pmod p$$

mit $\frac{p^k-1}{v_k}$ als Minimalexponent. Es folgt dann

$$(\xi^{m'})^{\frac{m''(p^k-1)}{v_k}} \equiv 1 \pmod p \tag{9}$$

mit $\frac{m''(p^k-1)}{v_k}$ als Minimalexponent. Gehört nun $\xi \bmod p$ zum Exponenten Q, ist also

$$\xi^Q \equiv 1 \pmod p \quad \text{und folglich erst recht} \quad (\xi^{m'})^Q \equiv 1 \pmod p,$$

so muß Q ein Vielfaches von $\frac{m''(p^k-1)}{v_k}$ sein, d. h.

$$Q = s\frac{m''(p^k-1)}{v_k}.$$

Wegen (9) muß gelten

$$Q \Big| \frac{m'm''(p^k-1)}{v_k}$$

und also

$$(10) \qquad s \mid m' \quad \text{und} \quad \left(s, \frac{m''(p^k-1)}{v_k}\right) = 1 .$$

Wenn nun die Gradzahl r von ξ ein Vielfaches von kh ist, d. h. $r = ikh$, so folgt

$$p^{ikh} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, s\, \frac{m''(p^k-1)}{v_k}\right)$$

mit ikh als Minimalexponent.

Es sei

$$(11) \qquad \left(\frac{sm''(p^k-1)}{v_k}, p^{kh}-1\right) = g .$$

Aus

$$sm'' \Big| (p^{kh}-1) \quad \text{und} \quad \frac{p^k-1}{v_k} \Big| (p^{kh}-1)$$

folgt $4 \nmid \frac{sm''(p^k-1)}{g\, v_k}$, wenn $4 \nmid (p^{kh}-1)$ ist.

Für die Zahl i findet man also nach Satz 2 mit $a = p^{kh}$ und $P = \frac{sm''(p^k-1)}{v_k}$ folgenden Wert

$$(12) \qquad i = \frac{sm''(p^k-1)}{g\, v_k} .$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 7 ist

$$\left(\frac{(m'm''(p^k-1)}{v_k}, p^{kh}-1)\right) = m'm''\, d_k .$$

Wegen der Relationen (10), (11), ferner

$$\left(m', \frac{m''(p^k-1)}{v_k}\right) = 1 \quad \text{und} \quad m' \mid (p^{kh}-1)$$

muß dann gelten

$$\frac{m'}{s} = \frac{m'm''d_k}{g},$$

also

$$\frac{sm''}{g} = \frac{1}{d_k} .$$

Damit ist nach (12)

$$i = \frac{p^k-1}{d_k\, v_k} \quad \text{und} \quad r = \frac{p^k-1}{d_k\, v_k}\, kh .$$

Bemerkung. Für $f(x) = x - a$ erhält man aus Satz 8 den Satz von Ore. Dabei ist jedoch Ind $a = d$ durch die Zahl v ersetzt, die durch die Kongruenz $a^{\frac{p-1}{v}} \equiv 1 \pmod{p}$ mit $\frac{p-1}{v}$ als Minimalexponent definiert ist.

Für die dem Polynom $(x-a)^k$ entsprechende Reihe τ'_n erhält man

$$\tau'_n = \frac{a^{n-1}}{(k-1)!} \prod_{\lambda=0}^{k-2} (n+\lambda).$$

Die Relation (7) kann auch für $(x-a)^k$ direkt benutzt werden. Es sei nun P eine Periode mod E für τ'_n:

$$\tau'_n \equiv \tau'_{n+P} \pmod{E}.$$

Ferner sei $(E, (k-1)!) = 1$ und $(E, a) = 1$. Wird dann ξ in (7) durch a ersetzt, so folgt wie (8)

$$a^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

Da $\prod_{\lambda=0}^{k-2}(n+\lambda)$ ein Polynom in n ist, so muß P ein Vielfaches von E sein [3]). Gehört a mod E zum Exponenten v, so ist also

$$P = \frac{Ev}{(E, v)}$$

die kleinste Periode mod E. Dieses gilt demnach auch für die dem normierten Polynom

$$f(x) = (x-a)^k + EM(x)$$

entsprechende Reihe τ_n, denn hier ist

$$\tau_n \equiv \frac{a^{n-1}}{(k-1)!} \prod_{\lambda=0}^{k-2} (n+\lambda) \pmod{E}.$$

Mithin ist $\frac{Ev}{(E, v)}$ ein gemeinsamer Exponent mod E für die Wurzeln von $f(x)$. Ist die Diskriminante von $f(x)$ von 0 verschieden, so ist umgekehrt ein gemeinsamer Exponent der Wurzeln eine Periode für τ_n. Damit ist gezeigt, daß $\frac{Ev}{(E, v)}$ der kleinste gemeinsame Exponent mod E für die Wurzeln von $f(x)$ ist. Nach Satz 4 muß dann $\frac{mEv}{(E, v)}$ der kleinste gemeinsame Exponent für die Wurzeln des Polynoms

$$F(x) = (x^m - a)^k + EM(x)$$

sein, wenn die Diskriminante von $F(x)$ nicht verschwindet.

Aus früheren Untersuchungen von mir [4]) erhält man nun z. B. folgendes Irreduzibilitätskriterium:

---

[3]) Der Beweis durch Schluß von $k-1$ auf k folgt aus $(k-1)\prod_{\lambda=0}^{k-3}(n+\lambda) = \prod_{\lambda=0}^{k-2}(n+\lambda) - \prod_{\lambda=0}^{k-2}(n-1+\lambda)$.

[4]) a. a. O. [2]).

Satz 9. *Es sei $F(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom der Form*

$$F(x) = (x^m - a)^k + EM(x),$$

wo $(E, (k-1)!) = 1$ ist und $a \bmod E$ zum Exponenten v gehört. Wenn dann $(-a)^k + EM(0)$ keinen echten Faktor d mit

$$d^{\frac{mEv}{(E,v)}} \equiv 1 \pmod{E}$$

enthält, so kann $F(x)$ nur dann reduzibel sein, wenn unter den Wurzeln von $F(x)$ wenigstens eine algebraische Einheit vorkommt.

Eingegangen 4. Dezember 1935.

Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

1. Herr Bouligand[1]) hat die Frage aufgeworfen nach der Struktur derjenigen ebenen Punktmengen $\mathfrak{M}$, welchen in jedem ihrer Punkte P_0 eine der beiden folgenden Eigenschaften zukommt:

1, 1. Jeder Kreis $\mathfrak{K}(Q_1, Q_2, Q_3)$ durch drei zu P_0 benachbarte Punkte Q_1, Q_2, Q_3 von $\mathfrak{M}$ strebt einem Nullkreis zu, wenn die Q_j beliebig gegen P_0 streben[2]).

1, 2. Zu P_0 läßt sich ein Paar rechtwinkliger Achsen x, y derart angeben, daß eine Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{M}$ ganz einem durch $0 \leqq |x| \leqq a,\ \lambda|x|^{1+\Theta} \leqq y \leqq b$ definierten Bereiche angehört, wobei $0 < a,\ 0 < b, 0 < \lambda$ und $0 < \Theta < 1$ passend gewählte reelle Zahlen bezeichnen, die im allgemeinen von P_0 abhängen.

2. Hinsichtlich der Eigenschaft 1,1 ist bereits bekannt[3]), daß kein Kontinuum[4]) diese Eigenschaft besitzen kann, m. a. W. daß jede Menge $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft 1,1 höchstens punkthaft[4]) sein kann. Daß das gleiche hinsichtlich der Eigenschaft 1,2 gilt, scheint bisher nicht bekannt zu sein.

Im folgenden soll dies als Spezialfall einer etwas allgemeineren Feststellung bewiesen werden. Dieser wird sich auch die Frage 1,1 unterordnen, womit sich zugleich eine neue (wie es scheint übersichtliche) Erledigung von 1,1 ergibt. Auf einige mögliche Verallgemeinerungen der Fragestellung wird am Schluß hingewiesen.

3. Unter einem *Tangentialschmiegkreis*[5]) der ebenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ *in einem ihrer Häufungspunkte* H soll folgendes verstanden werden: Es sei t irgendeine Tangente an $\mathfrak{M}$ in H, d. h. Limes einer Folge von Geraden g_ϱ durch H und einen Punkt P_ϱ von $\mathfrak{M}$, wobei $P_\varrho \to H$ mit $\varrho \to \infty$. Ein zu t gehöriger Tangentialschmiegkreis $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(H; t, \mathfrak{M})$ in H an $\mathfrak{M}$ ist dann erklärt als Limes einer Folge von Kreisen $\mathfrak{K}_\varrho$ der folgenden Art:

---

[1]) G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932, S. 221/222.

[2]) Außer den Nullkreisen, d. h. den Punkten, werden hier und im folgenden auch die Geraden zu den Kreisen gerechnet. Operationsbereich ist die euklidische Ebene.

[3]) M. Ch. Brunold, Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinus définis par des conditions géométriques, Bull. sci. école polytechn. Timisoara **5** (1934), 12—37. — Vgl. auch G. Bouligand, Critères de discontinuité pour les ensembles ponctuels, ebenda, S. 38—40.

[4]) Unter einem *Kontinuum* wird im folgenden eine abgeschlossene, mehr als einen Punkt enthaltende, zusammenhängende Punktmenge verstanden und unter einer *punkthaften* Menge eine solche Punktmenge, in welcher kein Kontinuum als Teilmenge enthalten ist (vgl. Zoretti-Rosenthal, Punktmengen, Enzykl. d. math. Wiss. II, 3, S. 986 und 900).

[5]) Vgl. J. Hjelmslev, Über die Grundlagen der kinematischen Geometrie, Acta math. **47** (1926), S. 143 ff. — In der Terminologie von Herrn Bouligand (vgl. Fußnote 1) wäre die Gesamtheit der Tangentialschmiegkreise in einem Punkte P_0 als „Kreiskontingent" (contingent circulaire) der Menge in P_0 zu bezeichnen.

$\mathfrak{K}_\varrho$ geht durch H, besitzt dort t als Tangente und enthält außerdem einen Punkt Q_ϱ von $\mathfrak{M}$, wobei $Q_\varrho \to H$ mit $\varrho \to \infty$. Es ist dann $\mathfrak{T} = \lim_{\varrho \to \infty} \mathfrak{K}_\varrho$.

Als *Tangentialkrümmung* von $\mathfrak{M}$ in H bezeichnen wir die untere Grenze der (nichtnegativen) Krümmungen aller Tangentialschmiegkreise, wobei Nullkreisen die Krümmung $+\infty$ zugeschrieben wird. Dann lautet die zu beweisende Behauptung:

Eine Punktmenge der euklidischen Ebene, deren Tangentialkrümmung in jedem (zu ihr gehörigen) Häufungspunkte unendlich ist, muß punkthaft sein.

3,1. Unter den Grenzwerten der in 1,1 genannten Kreise $\mathfrak{K}(Q_1, Q_2, Q_3)$ sind sicher auch die sämtlichen Tangentialschmiegkreise enthalten. Die Frage 1,1 ordnet sich also in der Tat dem Problem in Nr. **3** als spezieller Fall unter.

3,2. Besitzt $\mathfrak{M}$ im Punkte P_0 die Eigenschaft 1,2, so ist die Tangentialkrümmung von $\mathfrak{M}$ in P_0 unendlich. Daher ist auch die in 1,2 enthaltene Frage Spezialfall des Problems der Nr. **3**.

3,3. Es sei $\mathfrak{M}$ ein stetig differenzierbarer Bogen $y = f(x)$; ferner existiere in $x = x_0$ auch die zweite Ableitung von $f(x)$, und besitze einen endlichen Wert. Dann sind alle Tangentialschmiegkreise an $\mathfrak{M}$ in P_0 identisch und gleich dem Krümmungskreis im klassischen (üblichen) Sinne [6]); die Tangentialkrümmung des Bogens in x_0 ist also endlich.

4. Zum Beweise der in Nr. **3** aufgestellten Behauptung können wir (indirekt) so schließen:

Angenommen, in jedem Häufungspunkte von $\mathfrak{M}$ sei die Tangentialkrümmung unendlich, so daß also alle Tangentialschmiegkreise Nullkreise sind. Angenommen ferner, es enthalte $\mathfrak{M}$ ein Kontinuum [4]) $\mathfrak{N}$; o. B. d. A. kann $\mathfrak{N}$ als beschränkt angenommen werden. Dann muß $\mathfrak{N}$ von endlicher zyklischer, und speziell linearer Ordnung sein, d. h. $\mathfrak{N}$ hat mit jedem Kreise und mit jeder Geraden höchstens endlich viele verschiedene Punkte gemeinsam, enthält also insbesondere keine Strecken und keine Kreisbogen [7]). Enthielte nämlich [7]) der Durchschnitt eines Kreises $\mathfrak{k}$ (der ev. auch eine Gerade sein kann) mit $\mathfrak{N}$ unendlich viele Punkte, so wäre auf der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{N}$ auch ein Häufungspunkt H von $\mathfrak{k} \frown \mathfrak{N}$ vorhanden, also eine gegen H konvergierende Folge von Punkten P_ϱ aus $\mathfrak{k} \frown \mathfrak{N}$. Dann existierte aber der Limes t der Geraden durch H und P_ϱ und es wäre t Tangente an $\mathfrak{N}$ und an $\mathfrak{k}$ in H; schließlich wäre $\mathfrak{k}$ Tangentialschmiegkreis von endlicher Krümmung in H an $\mathfrak{N}$. Wegen der endlichen linearen Ordnung von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{N}$ Bogensumme [8]), enthält also einen einfachen, abgeschlossenen Bogen $\mathfrak{B}$, so daß die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{N}-\mathfrak{B}$ fremd zum offenen Kern von $\mathfrak{B}$ ist. Dann ist $\mathfrak{B}$ ebenfalls von endlicher a) linearer und b) zyklischer Ordnung. Wegen a) enthält $\mathfrak{B}$ einen konvexen Teilbogen [9]) und dieser wegen b) einen Bogen $\mathfrak{Z}_3$ von der zyklischen Ordnung drei [10]). Der Ausartungsfall, daß an Stelle von $\mathfrak{Z}_3$ eine Strecke oder ein Kreisbogen tritt, kommt nicht in Frage, da dann die Tangentialkrümmung nicht unendlich wäre. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Bogen $\mathfrak{Z}_3$ die Darstellung $y = f(x)$

---

[6]) Dies lehrt eine einfache Rechnung. Die klassische Krümmung ist $f'' : (1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}$.

[7]) Vgl. Brunold, a. a. O. [3]), S. 21/22. Für die Gültigkeit der Behauptung ist die Abgeschlossenheit der betrachteten Menge (im Texte oben $\mathfrak{N}$) wesentlich.

[8]) A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta mathematica **55** (1930), S. 67 ff. Vgl. auch O. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Crelles Journal **167** (1932), S. 22, Nr. 0,5.

[9]) O. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal **164** (1931), S. 50 ff.; auch Haupt, a. a. O. [10]), S. 184.

[10]) O. Haupt, Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (Math.-naturwiss. Abt.) 1935, S. 185.

bezüglich rechtwinkliger kartesischer Koordinaten x, y gestattet ($0 \leqq x \leqq 1$). Der Bogen $\mathfrak{Z}_3$ besitzt zugleich mit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ in jedem Punkte unendliche Tangentialkrümmung. Nun ist aber $\mathfrak{Z}_3$, also $f(x)$, stetig differenzierbar [11]). Wegen der Konvexität von $\mathfrak{Z}_3$ besitzt $f(x)$ fast überall, etwa in $x = x_0$, eine endliche zweite Ableitung. Zufolge 3,3 kann daher die Krümmung in x_0 nicht unendlich sein, w. z. z. w. — Man kann auch lediglich aus der Tatsache, daß in $\mathfrak{N}$ *konvexe* Bogen $\mathfrak{K}$ enthalten sind, einen Widerspruch gewinnen: $\mathfrak{K}$ enthält Punkte P, in denen die zweite Ableitung $f''(x)$ existiert und endlich ist, genauer: in denen die Ableitung der rechten Ableitung existiert, endlich ist und mit der ebenfalls existierenden Ableitung der linken Ableitung übereinstimmt. Daraus folgt die Existenz eines Tangentialkrümmungskreises mit endlicher Krümmung [12]).

5. Statt mit Hilfe der Darstellung $y = f(x)$ für den Bogen $\mathfrak{Z}_3$, der Konvexität von $f(x)$ und des Lebesgueschen Satzes auf die Existenz eines Punktes von endlicher Tangentialkrümmung zu schließen, hätten wir auch die Hjelmslevschen Sätze heranziehen können, denenzufolge in jedem Punkte von $\mathfrak{Z}_3$ ein einseitiger Tangentialschmiegkreis existiert, welcher längs $\mathfrak{Z}_3$ monoton wächst [11]). Daraus ergibt sich wiederum der Beweis. Dieser letzterwähnte Gedankengang dürfte den Vorzug der Verallgemeinerungsfähigkeit besitzen. Die oben benutzten Sätze, denenzufolge die ordnungshomogenen Bogen endlicher linearer bzw. zyklischer Ordnung im wesentlichen nur von zweiter bzw. dritter Ordnung sein können, lassen nämlich — wie wir an anderer Stelle zu zeigen hoffen — Verallgemeinerungen auf gewisse Systeme von $\mathfrak{K}_2$- und $\mathfrak{K}_3$-Kurven zu; wahrscheinlich gilt dabei auch eine entsprechende Verallgemeinerung der Hjelmslevschen Sätze. Damit wäre dann die Möglichkeit gegeben, sowohl die Problemstellung als den Beweis zu verallgemeinern.

Was weiterhin die Übertragung auf den R_n anlangt, so liegt es nahe, zunächst in geeigneter Weise Tangentialschmiegkugeln an eine Menge $\mathfrak{M}$ des R_n in einem Punkte P von $\mathfrak{M}$ und mit deren Hilfe die Tangentialkrümmung an $\mathfrak{M}$ in P zu definieren; es würde sich dann um die Frage handeln, ob Mengen mit überall unendlicher Tangentialkrümmung höchstens punkthaft sein können. Doch soll weder hierauf eingegangen werden, noch auf diejenige Fassung, in welcher von Herrn Bouligand [1]) die Verallgemeinerung des ebenen Problems auf den Raum aufgestellt wurde.

---

[11]) J. Hjelmslev, a) Introduction à la théorie des suites monotones, Oversigt over det kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1914, Nr. 1. b) Die graphische Geometrie, 8. Skand. Mat.-Kongr. Stockholm 1934, S. 10. — Falls man nur die stetige Differenzierbarkeit benötigt, kann diese leicht auch direkt sicher gestellt werden.

[12]) Vgl. B. Jessen, Om konvekse Kurvers Krumning, Matematisk Tidskrift B, 1929, Kopenhagen; auch H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta mathematica **66** (1935), S. 7.

Eingegangen 1. März 1936.

Josef Louis Lagrange.

Zur 200. Wiederkehr seines Geburtstages am 25. 1. 1936.

Von *Wilhelm Lorey* in Frankfurt a. Main. *)

Schon zweimal haben die Mathematiker Deutschlands die 200. Wiederkehr des Geburtstages eines Mathematikers gefeiert, der, von Friedrich dem Großen aus dem Ausland berufen, viele Jahre als Mitglied der Preußischen Akademie gewirkt hat, und dessen Namen in unserer Wissenschaft unvergänglich ist. Im Jahre 1907 galt es, das Gedächtnis des Baseler Pastorensohnes Leonhard Euler [1]) zu feiern, der von 1741—1766 in Berlin tätig war. Im Jahre 1928 war eine Sitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft [2]) dem Gedenken an den einstigen Schneiderlehrling und Schreibergehilfen aus Mühlhausen im Elsaß, Johann Heinrich Lambert, gewidmet, der 1764 nach Berlin gekommen war, wo er bis zu seinem frühen Tode 1777 wirkte. Und nun ist in diesem Jahre zum 200. Male der Geburtstag eines Mathematikers wiedergekehrt, der in den Schriften der Preußischen Akademie mit 56 Beiträgen vertreten ist [3]), vom Jahre 1765 an, schon ein Jahr vor seinem Einzug in Berlin, bis zum Jahre 1803, wo er Berlin schon seit 16 Jahren wieder verlassen hatte, um einen neuen Wirkungskreis in Paris zu finden, der Hauptstadt des Landes, das ihn doch mit Recht als seinen Sohn ansieht, wenn er auch außerhalb Frankreichs, in Turin, geboren ist: Josef Louis Lagrange.

Wie sehr der Name Lagrange im Bewußtsein der heutigen Mathematiker lebendig ist, zeigt schon die Tatsache, daß in der Sitzung des Reichsverbandes der mathematischen Gesellschaften im letzten September in Stuttgart wiederholt in der Aussprache über die angewandte Mathematik der Name Lagrange genannt wurde. Als am 10. April 1913 der Todestag Lagranges zum 100. Male wiedergekehrt war, hat Herr Korn [4]) in einer Sitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft einen kürzeren Vortrag über Lagrange gehalten. In demselben Jahre haben die *Annali di Matematica*, veranlaßt durch die Turiner Akademie der Wissenschaften, zwei Bände ihrer Zeitschrift dem Andenken Lagranges gewidmet [5]). Bei der 200. Wiederkehr des Geburtstages von Lagrange ist es wohl berechtigt, daß deutsche Mathematiker eine Feier veranstalten zum Gedenken an diesen Großen aus dem Reich der Mathematik, der zwar kein Deutscher, aber deutsches Wesen voll anerkennend, sich in Berlin in der glanzvollen Zeit Friedrich des Großen wohl gefühlt hat, und dessen Schöpfungen auch unserem Zeitalter noch viel zu geben haben.

---

*) Durch Ausführungen über die Mechanik und die Astronomie erweiterter Vortrag, gehalten bei der Lagrangegedenkfeier der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 29. Januar 1936, in der Jenaer Mathematischen Gesellschaft am 31. Januar 1936 und der Darmstädter Mathematischen Gesellschaft am 12. Februar 1936. In Berlin hat Herr Hamel anschließend über die Mécanique Analytique gesprochen und Herr Witt über Lagranges Beiträge zur Himmelsmechanik; in Jena hat Herr Winkelmann den Vortrag durch Ausführungen über Lagranges Mechanik ergänzt.

Bei der überaus großen Menge von Arbeiten, die mit dem Briefwechsel 14 Großquartbände der stattlichen, von I. A. Serret und A. Darboux mit Unterstützung des französischen Unterrichtsministers herausgegebenen Werke ausfüllen [6]), ist es schon aus sachlichen Gründen nicht möglich, im Rahmen eines Vortrages erschöpfend darzustellen, was Lagrange alles geleistet hat. Meine Aufgabe soll es sein, über Lagranges Leben und Persönlichkeit zu sprechen und einen Überblick über seine Arbeiten zu geben [7]). Dabei wird über die Mathematik in Deutschland zu Lagranges Zeit manches gesagt werden.

Josef Louis Lagrange ist am 25. Januar 1736 in Turin geboren als Sohn eines Kriegsschatzmeisters, der im Dienste des Königs von Sardinien stand. Die Familie stammt aus Frankreich, worauf schon der Name hinweist. Sein in Paris geborener Urgroßvater war in sardinischen Dienst übergetreten. Der Vater unseres Lagrange war mit der Tochter eines sehr wohlhabenden Arztes verheiratet, hatte aber durch unglückliche Spekulation sein Vermögen verloren. Dieses Mißgeschick war für Lagrange, wie er selbst einmal äußerte, der Anlaß zum Aufstieg in der Mathematik. In früher Jugend zeigte sich noch kein besonderes mathematisches Interesse; es fesseln ihn vielmehr die römischen Klassiker Cicero und Vergil. Aber dann studiert er die geometrischen Werke der Alten, bis ihm eine Abhandlung des Astronomen Halley in die Hände fiel, in der dieser die Überlegenheit der Analysis über die Geometrie auseinandersetzte. Dadurch wurde die Quelle angeschlagen, aus der bald Lagranges geniale mathematische Schöpfungen hervorsprudelten. Der kaum 17jährige wirkte schon als Lehrer der Mathematik an der Artillerieschule seiner Vaterstadt. Unter den Schülern, die anfänglich älter sind als er, findet er gleichstrebende, für die Mathematik begeisterte Freunde und gründet mit ihnen eine zunächst private Vereinigung, aus der dann die Turiner Akademie der Wissenschaften entstanden ist. Die in den Schriften der Akademie veröffentlichten Arbeiten des jungen Turiner Mathematikers erweckten in der wissenschaftlichen Welt großes Aufsehen. Schon vorher war er brieflich mit berühmten Mathematikern in Verbindung getreten. Sein erster noch lateinisch verfaßter Brief geht an Euler nach Berlin [8]). Der Brief trägt als Datum nur Monat und Tag. Daß er aus dem Jahre 1754 stammt, ergibt sich aus einer Stelle am Schluß, die für die Mathematik in Deutschland besonderes Interesse bietet. Der 18jährige Lagrange bittet nämlich Euler um bestimmte Nachrichten über das Gerücht vom Tode des berühmten Wolf. Damit ist der am 9. April 1754 gestorbene Hallesche Professor der Philosophie und Mathematik, Christian Wolf, gemeint, der seit dem Regierungsantritt Friedrichs des Großen wieder in Halle wirken konnte, aus dem er von Friedrich Wilhelm I. wegen seiner philosophischen Lehren vertrieben worden war. Wolf hatte eine Zuflucht als Professor der Mathematik in Marburg gefunden, wo ihn Euler auf seiner ersten Reise nach Petersburg besuchte; Euler erzählt in einem seiner *Briefe an eine deutsche Prinzessin* [9]) von diesem Besuch. Wolf, der als Vertreter der Leibnizschen Philosophie eine große Wirksamkeit ausübte, hat in seinen mathematischen Schriften und Vorlesungen doch schon gelegentlich die Leibnizsche Differentialrechnung zu bringen versucht, eine große Seltenheit an deutschen Universitäten im 18. Jahrhundert. Das mathematische Niveau war damals in Deutschland sehr niedrig. Der Göttinger Kaestner[10]), der bekannteste und berühmteste Professor der Mathematik in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts an einer deutschen Universität, konnte wohl mit Recht einmal sagen, für eine Professur der Mathematik an den meisten deutschen Universitäten sei keine Kenntnis der höheren Mathematik erforderlich [11]). Ich erwähne diese Tatsache, weil sie erklärt, warum Friedrich der Große berühmte Mathematiker aus dem Ausland an seine Akademie berufen hat. Er hat diese Notwendigkeit offenbar selbst bedauert, wie sich aus seiner Abhandlung über die Erziehung ergibt, in der er unter Hinweis auf Leibniz und

Kopernikus sich gegen die falsche Meinung wendet, in Deutschland gäbe es keine mathematische Begabung. Diese Wissenschaft werde nur zu wenig unterstützt und daher fehle es an geeigneten Professoren [12]). Eine ähnliche Erwägung hat übrigens um die Mitte des 18. Jahrhunderts zur Gründung der Bayrischen Akademie der Wissenschaften und der Berufung Lamberts als ersten Mathematiker geführt.

Wenn Euler in seinem ersten Brief an Lagrange, der vom 6. Dezember 1755 stammt und wie alle seine Briefe an Lagrange lateinisch verfaßt ist, die Frage nach Wolfs Tod nicht beantwortet, so erklärt sich das zum Teil wohl daraus, daß Euler vermutlich ein sehr ungünstiges Urteil Wolfs über ihn bekannt geworden war [13]); in der Hauptsache hat ihn aber der mathematische Inhalt der Briefe des jungen Lagrange überaus gefesselt. Der erste Brief Lagranges bringt freilich etwas, was, wie Euler schreibt, schon Leibniz gefunden: die Analogie zwischen der binomischen Entwicklung $(a + b)^m$ und dem m-ten Differentialquotienten eines Produktes, den Lagrange so schreibt $(x \,.\, y)^m$. Aber der zweite Brief Lagranges vom 12. 8. 1755 enthält schon ausführliche Erörterungen über Fragen der Variationsrechnung; gleich im Anfang führt Lagrange das seitdem in der Variationsrechnung übliche Symbol δ ein. Zugleich enthält dieser Brief schon den Grundgedanken des Verfahrens der Variation der unabhängigen Veränderlichen bei dem Problem der Brachistochrone. Aber erst 70 Jahre später ist dieses Verfahren von dem Berliner Mathematiker Martin Ohm planmäßig durchgeführt worden, der, wie es scheint, wesentlich unter dem Einfluß des ihn gewiß überragenden Jacobi immer etwas von oben herab geringschätzig behandelt worden ist, ein Urteil, das sich dann lange in der Berliner Tradition erhalten hat. Ich benutze daher gern die Gelegenheit, darauf hinzuweisen, daß Herr Bolza in seiner im 10. Band von Gauß' Werken abgedruckten Abhandlung: „Gauß und die Variationsrechnung" mit großer Anerkennung von den Ohmschen Arbeiten über Variationsrechnung spricht. Martin Ohm, der Bruder des durch das Ohmsche Gesetz bekannten Physikers Georg Simon Ohm, im Ordinariat übrigens der unmittelbare Vorgänger von Weierstraß, ist mathematisch Autodidakt; er hat sich, wie sich aus seinem eigenhändigen in den Akten des Berliner Ministeriums befindlichen Lebenslauf ergibt, durch das Studium Eulers und vor allen Dingen französischer Mathematiker, insbesondere Lagranges gebildet [14]). Welchen großen Eindruck der zweite Brief Lagranges auf Euler gemacht hat, bekunden dessen Worte in der Antwort:

Eximiam ingenii tui sagacitatem satis admirari non possum.

Und schon in einem Brief vom 14. 4. 1756 fragt Euler den 20jährigen Lagrange, ob er nicht Lust hätte, Turin mit Berlin zu vertauschen; für ihn selbst gäbe es nichts Wünschenswerteres als ein persönlicher Verkehr mit Lagrange. Aber es vergingen noch 10 Jahre, bis Lagrange einen offiziellen Ruf aus Berlin erhielt und ihm folgen konnte. Er war schon 1759 außerordentliches Mitglied der Berliner Akademie geworden, offenbar auf Grund von drei jetzt in der Gesamtausgabe (Bd. 1) 146 Seiten umfassenden Abhandlungen, die er in diesem Jahre im ersten Band der von ihm ins Leben gerufenen Miscellania Taurinensia veröffentlicht hat. Die Untersuchungen über Maxima und Minima von Funktionen auch mehrerer Veränderlichen läßt seinen mathematischen Bildungsgang erkennen: er hat Mac Laurin und vor allem Eulers Introductio studiert. Die zweite Arbeit behandelt die Integration einer Differenzengleichung nach Analogie der Differentialgleichung; sie bringt außerdem viel über wiederkehrende Reihen, ein Thema, das damals ja oft in der mathematischen Literatur behandelt wurde. Die dritte Arbeit betrifft die Schallfortpflanzung und die Schwingungen einer Seite und damit ein Problem, das im 18. Jahrhundert zu großen Diskussionen geführt hat, über die Lagrange auch eingehend berichtet.

Arbeiten Newtons, Taylors, d'Alemberts und Eulers betrachtet er kritisch, ehe er seine eigene Lösung gibt, und kommt schließlich auch auf musikalische Fragen zu sprechen. Erörtert wird auch die Frage, ob man einer divergenten Reihe einen bestimmten Wert beilegen könne. Es handelt sich besonders um die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos mx ,$$

deren Summation in der mathematischen Literatur bis 1860 immer wieder auftritt [15]). Lagrange berechnet, indem er mittels e^{ix} die Glieder zerlegt, zunächst die endliche Summe als Summe zweier geometrischen Reihen. Wie er dann durch doppelten Grenzübergang $m \to \infty$, $x \to 0$ den Wert $\frac{1}{2}$ findet, sei als Übung in Kritik für Anfängerseminare empfohlen.

Diese Arbeit brachte ihm trotz seiner Polemik in einen Briefwechsel mit dem Mathematiker, der im 18. Jahrhundert eine der einflußreichsten, weit über die Mathematik hinausgehenden Rollen im geistigen Leben Europas gespielt hat, mit dem am 17. Dezember 1717 in Paris geborenen und dort als Mitglied der Akademie lebenden d'Alembert, dessen Namen ja heute jeder Mathematiker aus der Mechanik kennt. Hier interessiert uns d'Alembert als der Gelehrte und Grandseigneur, der überallhin seine Verbindungen hatte; auch mit Friedrich dem Großen stand er in Briefwechsel. Aus dem 19. Jahrhundert könnte man zum Vergleich wohl Alexander v. Humboldt heranziehen. In gewissem Sinne erinnert auch der Grandseigneur Mittag-Leffler an ihn; man vergleiche nur die Charakteristik, die Felix Klein [16]) von Mittag-Leffler gegeben hat.

Lagrange hat den ersten Band der Turiner Abhandlungen an d'Alembert geschickt. Dieser bestätigt den Empfang in seiner Antwort vom 27. September 1759 voller Bewunderung für die sehr gelehrten und geistreichen Untersuchungen. Vor allem ist er von der Art entzückt, wie Lagrange zu einer allgemeinen Formel für die Bewegung einer Saite kommt mit unendlich vielen Massenpunkten. Bedenken hat er allerdings wegen des Übergangs vom Endlichen zum Unendlichen. Aber er schließt den Brief mit den Worten: „Adieu, Monsieur, vous-êtes destiné, si je ne me trompe, à jouer un grand rôle dans les sciences, et j'applaudi d'avance à vos succès."

Der Briefwechsel zwischen d'Alembert und Lagrange hat bis kurz vor d'Alemberts Tod angehalten; er füllt den Band 13 der gesammelten Werke Lagranges. Der letzte Brief d'Alemberts, von ihm selbst noch in großer Schwäche unterzeichnet, stammt vom 27. 9. 1783. Einen Monat später ist d'Alembert gestorben, wie Lagrange auf dem Brief vermerkt hat. Eine kurze Unterbrechung hat der Briefwechsel erfahren in der Zeit von November 1763 bis Ende Mai 1764, als Lagrange sich in Paris aufhielt, wo er einen Preis der Akademie für eine Arbeit über den Mond erhielt, in der er zum erstenmal das Prinzip der virtuellen Verschiebung benutzt. Der geistig sehr aufgeschlossene und für andere Dinge als Mathematik auch sehr interessierte Lagrange hat in diesen Pariser Monaten sicher Fühlung mit dem Kreis gewonnen, der Mittelpunkt des geistigen Lebens dort damals war, und aus dem heraus einige Jahre später unter einem Decknamen die Aufsehen erregende Schrift über das System der Natur erschienen ist [17]). Wie Lange in seiner Geschichte des Materialismus sagt, hat man unter anderen auch Lagrange für den Verfasser gehalten. Der wahre Verfasser ist aber der in Paris damals ansässige deutsche Baron Holbach. Daß Lagrange, wie Lange behauptet, in der Holbachschen Familie Hauslehrer gewesen sei, fand ich in den mir bekannten Quellen nicht bestätigt. Auf der Rückreise von Paris besucht Lagrange, von d'Alembert empfohlen, Voltaire in Genf, von dem er zum Essen geladen wird. „Ein Original, das verdient, besichtigt zu werden", wie Lagrange

gleich nach der Rückkehr von Turin aus schreibt. Voltaire, der an sich für die Mathematik Interesse gehabt haben soll, und jedenfalls auf die durch Newton beeinflußte mathematisch-philosophische Modeströmung in Frankreich während des 18. Jahrhunderts großen Einfluß gehabt hat, erwähnt, wie in Lagranges Werken bemerkt ist, in keinem seiner Briefe den Lagrangeschen Besuch.

In Turin wird Lagrange vom König und den Ministern sehr gut wieder aufgenommen. Man macht ihm allerlei Versprechungen, ohne sie anscheinend recht zu halten. Jedenfalls entsteht bei Lagrange ein lebhafter Wunsch, Turin zu verlassen, als die Möglichkeit, nach Berlin berufen zu werden, immer stärker wird. Dazu hat d'Alembert wesentlich beigetragen, der im Herbst 1763 in Berlin war, wo er natürlich auch Euler gesprochen hat. Dieser hat Lagrange d'Alembert gegenüber sehr gerühmt; Lagrange sei bestimmt, die höhere Mathematik sehr zu fördern, ein Urteil, das d'Alembert auch Lagrange mitteilt. Vermutlich hat d'Alembert auch mit Friedrich dem Großen über Lagrange gesprochen. In seinem Briefwechsel mit dem König wird er öfter gerühmt. So war der Boden gut vorbereitet für die endgültige Berufung, als Euler 1766 Berlin verließ, um wieder nach Petersburg zurückzukehren. Er selbst hat Lagrange als seinen Nachfolger im Direktorat der Mathematischen Klasse der Akademie empfohlen. Unter sehr günstigen Bedingungen kam die Berufung zustande. Der König bewilligte auch in großzügiger Weise Umzugskosten, die es Lagrange ermöglichten, über Paris, London und Hamburg nach Berlin zu reisen, wo er Ende Oktober 1766 eintraf, nachdem er vorher in Potsdam vom König empfangen worden war, der ihn, wie Lagrange an d'Alembert schreibt, sehr gut aufgenommen hat und ihm erheblich mehr bewilligte, als er gewünscht hat; er hat ihn auch gleich zum Direktor der mathematischen Klasse ernannt. Am 6. November 1766 wurde Lagrange als ordentliches Mitglied in die Akademie aufgenommen [18]). Er hielt nur eine ganz kurze Antrittsrede, da er von der Reise noch ermüdet sei und da man auch von einem Mathematiker, der seit früher Jugend mit abstrakten Studien sich beschäftigt habe, keine schwungvollen Reden erwarten dürfe. Er hoffe aber, ein würdiger Nachfolger Eulers zu werden und damit den Absichten unseres großen Monarchen zu entsprechen.

Die Mathematiker und Astronomen, die Lagrange in Berlin bei der Akademie vorfand, waren Castillon, Johann Bernoulli und Lambert; von ihnen ist im Briefwechsel mit d'Alembert wiederholt die Rede. Vor allem hat sich Lagrange für den etwas schwierigen Lambert sehr verwandt. Dieser hatte ja durch sein sonderbares, etwas unkultiviertes Wesen besonders auch beim König Anstoß erregt, wie sich aus dessen scharfem Urteil über Lambert in einem Brief an d'Alembert vom Juni 1766 ergibt. d'Alembert hatte daraufhin schon lange vor, ein Urteil von Lagrange über Lambert zu erbitten, kam aber erst 1769 dazu. Die Auskunft, die Lagrange in seinem Brief vom 15. Juli 1769 gibt, ist sehr interessant:

> Lambert ist sicher eines der besten und fleißigsten Mitglieder der Akademie. Die physikalische Klasse erhält er fast allein. Aber in seinem Wesen ist er sonderbar, und ich wundere mich nicht, daß der König ihn nicht mag. Ich selbst hatte Schwierigkeit, mich an ihn zu gewöhnen. Er ist oder schien mir wenigstens sehr von sich überzeugt, so daß ich mich entschlossen habe, ihn nicht zu oft zu besuchen, aber andererseits ihn öfter zu ducken, und das hat ihn zugänglich gemacht, so daß wir jetzt ganz gute Freunde sind. Er hat nur 500 Thaler von der Akademie, und wenn d'Alembert beim König etwas für ihn tun könnte, so wäre das sehr dankenswert, denn die Akademie verdankt Lambert sehr viel.

Diese Vermittlung d'Alemberts hat auch Erfolg gehabt; Lambert läßt sich durch Lagrange bei d'Alembert bedanken. Nach dem am 25. September 1777 erfolgten Tode Lamberts schreibt Lagrange eine Woche später an d'Alembert:

Ich bin ganz traurig über den Tod meines Kollegen Lambert; das ist ein unersetzlicher Verlust für unsere Akademie und für Deutschland im allgemeinen; er besaß in hervorragendem Maße die seltene Gabe, die Rechnung auf Erfahrung und Beobachtung anzuwenden und daraus sozusagen alles herauszuholen, was sich als Regel ergeben könnte. Seine Photometrie, ein in Frankreich und selbst in Deutschland wenig bekanntes Werk, ist ein wahres Muster für diese Art von Untersuchungen; er war übrigens wohl bewandert in der Rechnung und kannte die verschiedenen Zweige der Analysis und Mechanik. Sein vor einigen Jahren erschienenes dreibändiges deutsches Werk enthält ausgezeichnete Sachen, und es wäre sehr zu wünschen, daß jemand es übersetzte. Er hat bei all seinen Untersuchungen eine große Feinheit und besaß vor allem die Kunst, zu den einfachsten Ergebnissen zu kommen, selbst bei Fragen, die sehr verwickelt erschienen. Er ist allmählich an Auszehrung gestorben, da er niemals, mit Ausnahme der letzten vierzehn Tage, ein Heilmittel nehmen oder einen Arzt befragen wollte. Er hat von Natur bewundernswerten Charakter und Temperament erhalten; immer mit sich selbst zufrieden hat er niemals irgend welchen Neid oder Mißgunst gezeigt. Er hatte eine sehr naive Art zu denken und zu handeln, wodurch manchmal Leute, die ihn nicht im Einzelnen kannten, gegen ihn aufgebracht wurden. Aber wenn man einmal dazu gekommen war, ihn tiefer kennen zu lernen, mußte man für ihn alle Achtung und Freundschaft empfinden, die er verdiente, und so ist es mir gegangen. Wenn ich sein Leben beneide, so beneide ich auch seinen Tod, der sehr milde war, woran er selbst nie gezweifelt hatte.

Diese Charakteristik Lamberts durch Lagrange kennzeichnet aber auch Lagrange selbst als den gütigen, vornehm denkenden Mann, als der er offenbar von allen, die ihn gekannt haben, geschätzt wurde. Nach dieser menschlichen Seite hin war er aber auch weithin bekannt, auch bei solchen, die nicht mehr mit ihm persönlich zusammengekommen waren. So erklärt es sich, was der alte Goethe am 11. Februar 1829, also sechzehn Jahre nach Lagranges Tod, zu Eckermann sagte:

Lagrange war ein guter Mensch und eben deswegen groß. Wenn ein guter Mensch mit Talent begabt ist, so wird er immer zum Heil der Welt sittlich wirken, sei es als Künstler, Naturforscher, Dichter oder was alles sonst.

Bei einer anderen Gelegenheit sagt Goethe [19]):

Der Mathematiker ist nur insofern vollkommen, als er ein vollkommener Mensch ist, als er das Schöne des Wahren in sich empfindet; dann erst wird er gründlich, durchsichtig, umsichtig, rein, klar, anmutig, ja elegant wirken. Das alles gehört dazu, um Lagrange ähnlich zu werden.

Es ist wunderbar, wie richtig hier Goethe über Lagrange urteilt. Dabei hat Goethe sicher keine Arbeit von Lagrange gelesen; unter den 30 mathematischen Schriften seiner Bibliothek in Weimar ist Lagrange nicht vertreten, dessen mathematische Entwicklungen er auch selbst kaum hätte verstehen können. In seinen amtlichen Berichten über die Jenaer Sternwarte nennt er aber Lagrange und übrigens auch Laplace [20]) öfter. Einfühlend hat Goethe wohl geurteilt auf Grund dessen, was ihm Mathematiker, mit denen er zusammenkam, über Lagranges Arbeiten erzählten.

Waren die Turiner Jahre für Lagrange eine Zeit der Entwicklung, so sind die zwanzigeinhalb Jahre seiner Berliner Wirksamkeit als Gipfel seiner Produktion zu bezeichnen. Eine der ersten in Berlin entstandenen Arbeiten knüpft an eine Arbeit Lamberts über trinomische Gleichungen an. Lambert hatte eine der Wurzeln einer solchen Gleichung $x^n + px + q = 0$ nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{p}{q}$ entwickelt und auch Konvergenzbetrachtungen angegeben. Lagrange geht anders vor. Er betrachtet die Gleichung $\alpha - x + \varphi(x) = 0$ und gewinnt die berühmte Lagrangesche Reihe

$$\psi(x) + \varphi(x)\,\psi'(x) + \frac{1}{2}\frac{d[\varphi(x)]^2\psi'(x)}{dx} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2[\varphi(x)]^3\,\psi'(x)}{dx^2} + \cdots,$$

in der nach der Differentiation x durch α zu ersetzen ist. $\varphi(x)$ ist bei ihm eine durch eine Potenzreihe mit ganzzahligen Exponenten definierte Funktion und $\psi(x)$ irgendeine andere solche Funktion.

Diese Lagrangesche Reihe hat besonders die deutschen Mathematiker um die Wende des 18. Jahrhunderts sehr interessiert, wie sich z. B. aus Klügels mathemischem Lexikon ergibt. Es waren vor allem die Kombinatoriker unter Führung von Hindenburg, die sich mit der Reihe in vielen Veröffentlichungen beschäftigten; von ihnen ist besonders Bürmann zu nennen [21]). Lagrange wendet seine Reihe auf das Keplersche Problem an, d. h. die Lösung der Gleichung $x = t - c \sin x$. Strenge Konvergenzbeweise stammen aber erst von Cauchy.

Die numerische Auflösung von Gleichungen beschäftigt Lagrange auch sonst viel in jenen Jahren. Sein Einwand gegen das Newtonsche Verfahren erübrigt sich aber, soweit die Newtonsche Arbeit selber in Betracht kommt; denn Newton hat, worauf Baltzer[22]) hingewiesen hat, schon gesagt, daß gelegentlich quadratische Hilfsgleichungen zu benutzen sind. Die Arbeit Lagranges enthält den von Herrn Hamel in einem in den *Naturwissenschaften* [24]) zum Lagrange-Gedenktag veröffentlichten Aufsatz angeführten „Weierstraßschen Satz, der irgendwo bei Lagrange stehen soll". Es handelt sich um den, wie Lagrange selbst sagt, längst bekannten Satz, daß eine reelle Funktion zwischen zwei Stellen, an denen sie verschiedenes Vorzeichen hat, mindestens eine Nullstelle besitzen muß. Bisher hat man, sagt Lagrange, diesen Satz durch die Theorie der Kurven bewiesen. Man kann ihn aber auch rein analytisch so beweisen: Es sei $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \cdots$ und etwa $(p - \alpha)(p - \beta) \cdots < 0$ und $(q - \alpha)(q - \beta) \cdots > 0$. Es müssen also mindestens zwei entsprechende Faktoren verschiedene Zeichen haben, d. h. etwa $p - \alpha < 0$ und $q - \alpha > 0$; somit $p < \alpha < q$, d. h. α ist eine reelle Wurzel.

Daß die Annahme der Zerlegung in Linearfaktoren nicht befriedigend ist, hat übrigens vor Weierstraß Bolzano [24]) in seinem rein analytischen Beweis dieses Satzes dargelegt, wobei er sich auf die Lagrangesche Arbeit bezieht. Zur Lösung numerischer Gleichungen zieht Lagrange als erster die Kettenbrüche heran. Dieses Verfahren ist im vorigen Jahrhundert in gute Schulbücher übergegangen. Ich erinnere mich selbst aus meiner Gymnasialzeit, Lagranges Verfahren in der für mathematisch interessierte Schüler sehr anregenden Aufgaben-Sammlung von Heis [25]) kennen gelernt zu haben und damit zum ersten Male auch den Namen Lagrange. Es treten in der Lagrangeschen Arbeit auch die Teilbruchreihen auf, d. h. Entwicklungen der Form $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots$, mit denen sich schon Lambert beschäftigt hatte. Auch sie hat Heis in seiner Aufgabensammlung aufgenommen, und in neuester Zeit hat Herr Plaßmann [26]) in seiner Tafel der Viertelquadrate auf ihren Nutzen hingewiesen.

Für die allgemeine Algebra bedeuten seine und die ungefähr gleichzeitigen Arbeiten Vandermondes nach dem Urteil von Cauchy den Beginn eines neuen Zeitalters. Lagrange hat sich wohl als erster eingehend auch mit der Theorie der Tschirnhausen-Transformation beschäftigt. Wenn er dann weiter, anknüpfend an Moivre, die sogenannten reziproken Gleichungen behandelt, und wenn diese auch im vorigen Jahrhundert einen Bestandteil des mathematischen Schulpensums bildeten, so kann das auch als Beweis für den Einfluß Lagranges auf Deutschland dienen.

Als größte Leistung Lagranges in seinen Berliner Jahren galten seine zahlentheoretischen Arbeiten. In seinem Beitrag zu den Lagrangebänden der *Annali di Matematica* bezeichnet Herr Landau [27]) als Lagranges größte Leistung schlechthin seinen Beweis des Satzes, daß jede ganze Zahl durch höchstens vier Quadrate dargestellt werden kann. Lagrange begann seine zahlentheoretischen Veröffentlichungen mit Arbeiten über unbestimmte Gleichungen zweiten Grades. Auch bei ihnen finden wir, was bei vielen Arbeiten

Lagranges kennzeichnend ist, eine klare geschichtliche Einleitung. Über die Lagrangesche Abhandlung sagt Gauß [28]):

> Lagrange erfaßt die berühmte Aufgabe, alle unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze Zahlen vollständig zu lösen, in ihrer ganzen Allgemeinheit und läßt in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig.

Lagranges Hoffnung, daß durch seine Untersuchungen für die Mathematiker ein großes Feld für weitere Forschungen eröffnet wird, hat sich ja glänzend bestätigt. Hierzu haben auch seine Erläuterungen der von ihm veranlaßten französischen Übersetzung von Eulers Algebra beigetragen. Es ist sehr erfreulich, daß diese Lagrangeschen Erläuterungen, durch Heinrich Weber besorgt, in Ostwalds Klassikern erschienen sind, ebenso wie die Abhandlung über die unbestimmten Gleichungen, besorgt durch Netto.

In der gleichen Sammlung von Ostwalds Klassikern sind auch andere Arbeiten aus der Turiner und Berliner Zeit erschienen. Von der Variationsrechnung, die Stäckel besorgt hat, war schon die Rede. Im Jahre 1772 veröffentlichte Lagrange eine große Arbeit über partielle Differentialgleichungen, der später weitere Arbeiten auf diesem Gebiet folgten. Auch Euler hat sich darin schon sehr betätigt, ohne zu einem allgemeinen Verfahren zu gelangen. Bei Lagrange bildet die von Euler gefundene Bedingung

$$p\frac{dq}{dz} - q\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} = 0$$

den Ausgangspunkt. Er erkennt, wie Herr Kowalewski betont, der diese Arbeit für Ostwalds Klassiker übersetzt hat, die Tragweite der Eulerschen Zurückführung auf lineare partielle Differentialgleichungen. Lange hat Lagrange, wie er selbst sagt, mit einem bei seinem Lösungsverfahren auftretenden Paradoxon sich gequält, da scheinbar zwei willkürliche Funktionen auftreten, während bei der allgemeinen Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen nur eine willkürliche Funktion auftreten kann. Daß bei Lagrange tatsächlich kein Paradoxon vorliegt, ist später aufgeklärt worden.

Gelegentlich hat Lagrange bei seinen Arbeiten über partielle Differentialgleichungen flächentheoretische, d. h. geometrische Betrachtungen herangezogen, die sonst bei ihm sehr selten sind. Als eine geometrische Anwendung sieht er auch seine Arbeit über Kartenprojektionen an, ein Gebiet, in dem auch Lambert und Euler gearbeitet haben. Euler ist dadurch amtlich beauftragt worden, einen Atlas für preußische Schulen herauszugeben[29]), und die Lagrangesche Arbeit hat Laplace [30]) veranlaßt, einen Freund zu beauftragen, bei einer neuen französischen Karte die Lagrangesche Projektion zu benutzen. Es handelt sich bei Lagrange, neuzeitlich gesprochen, um eine konforme Abbildung, bei der Längen- und Breitenkreise wieder Kreise werden. Lagrange gibt als numerisches Beispiel eine Karte mit Berlin als Mittelpunkt. Bei Lagrange treten die für die Funktionentheorie so wichtig gewordenen partiellen Differentialgleichungen auf; mit Recht kann Herr Koebe[31]) in seinem Beitrag zum Lagrangeband der *Annali di Matematica* Lagrange als Urheber der konformen Abbildungen bezeichnen, wenn sich auch bei Lambert schon Ansätze finden, worauf Wangerin, der Lagranges Arbeit für Ostwalds Klassiker übersetzt hat, aufmerksam macht. In der Lagrangeschen Arbeit tritt der Ausdruck auf, den die Engländer nach H. A. Schwarz die „Schwarzian Derivation" nennen.

$$\frac{f'''(z)}{f(z)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f'''(z)}{f(z)}\right]^2.$$

Als eine Kleinigkeit, die aber für Lagranges elegante analytische Art der Darstellung

kennzeichnend ist, sei eine geometrische Aufgabe genannt, die Castillon in der Akademie sehr schwerfällig gelöst hat: Einem nach Lage und Größe gegebenen Kreise ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. Lagrange schickte sofort am anderen Morgen nach der Akademiesitzung an Castillon seine Lösung [32]). Erwähnt sei auch seine elegante analytische Berechnung der Oberfläche und des Inhalts einer Pyramide [33]). Genannt sei auch seine Abhandlung über die sphärische Trigonometrie. Sie schließt mit einem neuen eleganten Beweis des Legendreschen Satzes, wonach ein sphärisches Dreieck durch ein ebenes ersetzt werden kann mit den Winkeln

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma - \frac{\varepsilon}{3};$$

wie Lagrange findet, ist das Ergebnis bis auf $\frac{1}{r^4}$ genau [34]). Bei einer anderen Gelegenheit behandelt Lagrange eine geometrisch-trigonometrische Aufgabe, die dann den Übergang zu seiner Interpolationsformel bildete [35]). Es ist eine Erweiterung der Snelliusschen Aufgabe des Rückwärtseinschneidens: in der Ebene ist ein Dreieck ABC gegeben. Von einem außerhalb gelegenen Punkte S beobachtet man die scheinbaren Größen α, β, γ der drei Seiten. Die Pyramide $SABC$ ist zu konstruieren. Wie Lagrange ohne nähere Begründung angibt, führt die Aufgabe algebraisch behandelt auf eine Gleichung achten Grades. Das ist in der Tat sofort zu sehen, wenn man die Strecken SA, SB, SC als Unbekannte einführt und auf jedes Dreieck den Cosinussatz anwendet. Für die Praxis ist, wie Lagrange mit Recht sagt, damit nichts gewonnen. Lagrange gibt zunächst eine graphische Lösung mittels der von ihm so genannten Fehlerkurve. Es werden von einem Punkt 0 aus die drei Winkel α, β, γ gezeichnet. Auf dem ersten Strahl nimmt man schätzungsweise OB an. Da AB bekannt ist, läßt sich B auf dem zweiten Strahl, allerdings zweideutig, bestimmen. Ebenso aus BC auf dem dritten Strahl ein Punkt C und aus CA auf dem vierten Strahl ein Punkt D. Wenn nun zufällig OA richtig gewählt ist, muß OA gleich OD sein. Das ist aber im allgemeinen natürlich nicht der Fall, sondern es gibt einen Fehler $OA-OB$. Diesen trägt man als Lotzahl zur Abstandszahl OA auf. Man wiederholt nun für andere Werte von A die Konstruktion und erhält so die Punkte einer Fehlerkurve, die die OA-Achse im gesuchten Punkte schneidet. Gegenüber diesem gewiß ganz interessanten zeichnerischen Verfahren, das freilich für die praktische Geodäsie wohl keine Bedeutung hat, aber als Übungsaufgabe doch ganz nützlich ist, betont allerdings Lagrange ganz allgemein die Bedeutung seiner Interpolationsformel:

$$f(x) = f(\alpha)\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + f(\beta)\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + f(\gamma)\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Die Formel tritt freilich schon bei Waring [36]) auf, was Lagrange, der sonst immer seine Vorgänger gewissenhaft angibt, wohl entgangen ist. Er nennt das Problem der Interpolation das Problem von Mouton, unter welchem Namen es bei den Astronomen bekannt zu sein scheint, wie ich aus Bauschingers Enzyklopädieartikel schließe [37]). Die bei der Lagrangeschen Interpolationsformel auftretenden Polynome werden in neuester Zeit von Herrn Kowalewski [38]) als Lagrangesche Polynome $L(x)$ bezeichnet. Lagrange hat seine Interpolationsformel zur Berechnung von Tabellen benutzen lassen, die Lamberts Akademienachfolger Schulze [39]) herausgegeben hat. Von geschichtlichem Interesse ist eine Stelle aus der Schulzeschen Vorrede:

> Herr Direktor Lagrange verfiel auf den Gedanken, den rechten Winkel dezimal zu teilen [40]).

Neben rein mathematischen Arbeiten ist Lagrange in seiner Berliner Zeit aber auch weiter mit astronomischen Untersuchungen beschäftigt, nicht als Beobachter, sondern

gleich Euler und Lambert als Theoretiker. Wie sehr der Name Lagrange auch heute noch in der Astronomie eine Rolle spielt, zeigen schon die vielen Zitate in den zwei Astronomiebänden der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Kennzeichnend ist es aber auch, daß R. Wolf in seiner Geschichte der Astronomie, die einen Band der großen von der bayrischen Kommission herausgegebenen *Geschichte der Wissenschaften in Deutschland* bildet, einen Abschnitt Lagrange widmet. Unregelmäßigkeiten in der Bewegung der Jupitermonde war die erste in Berlin veröffentlichte astronomische Arbeit gewidmet. Es folgten Arbeiten über die Bahnbestimmung und das Dreikörperproblem. Bei der Bahnbestimmung führte er zweite Näherungswerte ein, die später besonders Gauß ausgebaut hat. Beim Dreikörperproblem gelingt ihm eine Zurückführung des kanonischen Systems 18. Ordnung auf ein solches 6. Ordnung. Er findet auch die einfachsten periodischen Lösungen. Die Astronomen sprechen noch heute von der Lagrangeschen Bewegung der drei gleich weit abstehenden, beziehentlich geradlinig angeordneten Massenpunkte. Auf Lagrange geht auch die Einführung der Störungsfunktion zurück, wenn der Name auch von Laplace stammt. Der für den 6. Juni 1769 erwartete Vorübergang der Venus vor der Sonne veranlaßte ihn 1767 zu einer Arbeit, in der er Emden als den geeignetsten Ort des preußischen Staates für die Beobachtung findet. Wenn die Venusvorübergänge auch für die Parallaxenbestimmung heute wohl nicht mehr die Bedeutung haben wie in früheren Jahrhunderten, so möchte ich doch gerade diese Arbeit Lagranges jüngeren Mathematikern, die ja heute bei ihrem Studium leider kaum Astronomie mehr treiben, zum Studium empfehlen.

Amtliche Dinge scheinen Lagrange in Berlin nicht sehr in Anspruch genommen zu haben. In den Akten des Archivs der preußischen Akademie fand ich nur eine an ihn gerichtete Anfrage des Königs über einen französischen Astronomen, der auf Wunsch von Friedrich als auswärtiges Mitglied aufgenommen werden soll.

Einmal hatte er auch ein Gutachten über eine der Akademie eingereichte Quadratur des Kreises zu erstatten, sowie über ein Verfahren, zu erkennen, ob die Erde an den Polen abgeplattet ist [41]). Wenn Lagrange das zweite Gutachten mit den Worten schließt: „Der Verfasser hat keine klare Idee der Frage, noch weniger von der Schwierigkeit, die sie einschließt, so daß sein neues Verfahren in keiner Weise die Aufmerksamkeit der Gelehrten verdient", so gilt ein solches Urteil auch heute noch für viele Arbeiten, mit denen Akademien oder Fakultäten belästigt werden, wenn auch mitunter in solchen Arbeiten von Liebhabern der Mathematik ganz brauchbare Annäherungslösungen vorhanden sind, wie einige Veröffentlichungen aus neuester Zeit zeigen, u. a. auch im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung.

Ein ruhiges, streng geregeltes Leben hat Lagrange in Berlin geführt, die größte Zeit als Witwer. In seiner ersten Berliner Zeit, in der er in der fremden Umgebung sich etwas verlassen fühlte, hat er eine junge Verwandte aus seiner Heimat kommen lassen, mit der er sich verheiratete [42]). Sie ist aber bald anscheinend an Tuberkulose gestorben. Bei rührender Pflege hat Lagrange seine medizinischen Kenntnisse ausgenutzt. Über sein Berliner Leben gibt es eine anschauliche Schilderung aus der Feder eines französischen Akademiekollegen Thiebault, der lange Jahre in Berlin als Lehrer des Kadettenkorps gewirkt hat [43]). Der Vormittag war der Erledigung von Briefen und der Lektüre gewidmet. Nach dem Mittagessen wurden nötige Besuche gemacht, und dann gab es einen einsamen schnellen Spaziergang. Um sechs Uhr schloß sich Lagrange zu Hause [44]) ein und arbeitete bis Mitternacht. Oft wurde er von durchreisenden Fremden aufgesucht, was ihm aber nicht lieb war.

In den Berliner Jahren der gesteigerten mathematischen Produktion kommt auf

einmal auch bei ihm eine Periode, in der er bezweifelt, daß in der Mathematik noch etwas zu machen sei. Physik und Chemie böten viel mehr Probleme: „Es ist nicht unmöglich, daß eines Tages die Mathematiker eine Rolle spielen wie heute die Arabisten an den Universitäten". (Diese resignierten Äußerungen finden sich in einem Brief an d'Alembert vom 21. 9. 1787.)

Man hatte schon früher wiederholt Versuche gemacht, Lagrange von Berlin wegzuberufen. Nach dem Tode des großen Königs setzten diese Versuche erneut und verstärkter ein. Wenn aber Mirabeau in einer Eingabe an Ludwig XVI. dringend empfiehlt, Lagrange von Berlin wegzuholen, wo er sich nicht mehr wohl fühle, so dürfte die von Mirabeau beliebte Charakteristik der Berliner Akademie und ihres Bestrebens, deutsche Gelehrte heranzuziehen, die Harnack anscheinend mit großer Zustimmung in seiner *Geschichte der Akademie* abdruckt [45]), heute doch nicht gebilligt werden. Man hat ernstliche Versuche gemacht, Lagrange, der sich übrigens über Mirabeaus Charakter in einem Brief an den Minister Hertzberg später sehr ungünstig geäußert hat, in Berlin zu halten, und hat ihm schließlich doch den erbetenen Abschied mit großem Bedauern bewilligt mit Zubilligung einer Pension, für die Lagrange auch noch später Arbeiten für die Akademie geliefert hat. Lagrange wurde auch gebeten, wie die Akten zeigen, einen Nachfolger vorzuschlagen; er erklärte, es sei schwer, einen geeigneten Deutschen zu nennen, er empfehle aber jedenfalls die Wahl eines Deutschen, dem dadurch die Möglichkeit einer Entwicklung geboten wäre. Gewisses Interesse bietet eine Vorschlagsliste [46]), die auch Harnack veröffentlicht hat, allerdings ohne die Unterschrift, die er anscheinend nicht entziffern konnte. Sie heißt meines Erachtens Tempelhoff. Dieser, damals noch Major, war kürzlich Mitglied der Akademie geworden auf Grund von mathematisch-astronomischen Arbeiten, von denen auch Lagrange in einigen Briefen spricht; er wurde später Leiter des militärischen Bildungswesens. Gerade in unserer Zeit bietet diese Beziehung zwischen Militär und Mathematik gewiß besonderes Interesse. Die Lagrangesche Stelle ist nicht sofort besetzt worden. Man hat ihm sogar die Stelle offen gehalten, und Lagrange selbst hat von Paris aus eine Zeit lang sich nach Berlin zurückgesehnt [47]), namentlich in der Unruhe der französischen Revolution, wo ihm als nicht in Frankreich Geborenen sogar einmal das Konzentrationslager drohte. Das wurde aber durch Eingreifen Lavoisiers verhindert, der in einer Eingabe an einen einflußreichen Bürger darauf hinwies, welche Bedeutung der Bürger Lagrange besonders auch bei der Neuregelung des Münzen- und Maßsystems habe [48]). Die darüber von ihm verfaßte Denkschrift hat Lagrange auch an den Minister Hertzberg nach Berlin geschickt.

In dieser Pariser Zeit erschien nun auch die *Mécanique Analytique*, die Lagrange schon in Berlin verfaßt hatte. Wie dieses Werk auch auf die mathematische Jugend Deutschlands wirkte, zeigt das Urteil eines Göttinger Dozenten, auf den damals viel Hoffnung gesetzt wurde, die er freilich leider nicht erfüllt hat: Fr. W. A. Murhard. Er urteilt 1803 so [49]):

> Das vollendete Werk eines unter unsterblichen Verdiensten um seine Wissenschaft grau gewordenen Mathematikers. — Eine neue Epoche hebt mit diesem Werke in der Geschichte der Mathematik an und neue Bahnen sind durch dasselbe den Geometern zur Vervollkommnung ihrer Theorie und Praxis eröffnet.

Was Lagranges Mechanik auch unserer Zeit bedeutet, soll uns ein hervorragender Sachkenner sagen: Karl Heun, weiland Professor der Mechanik in Karlsruhe, schreibt in seinem 1901 der Deutschen Mathematikervereinigung erstatteten Bericht über die kinetischen Probleme der Wissenschaft und Technik [50]):

Es blieb dem großen Genie Lagranges vorbehalten, das ganze Gebäude der Mechanik auf festen analytischen Grundlagen aufzubauen und hierdurch den allgemeinen Prinzipien erst die ganze handliche und feste Gestaltung zu geben, welche sie zu unveränderlichen Werkzeugen bei allen mechanischen Untersuchungen gemacht hat. Wenn auch die einseitige Hervorhebung der rein analytischen Methoden im Interesse der technischen Mechanik in der Folge eine bedeutsame Rückwirkung erfahren mußte, so bleibt Lagranges Werk das kanonische Buch des Mechanikers, sowohl als unvergleichliches systematisches Lehrgebäude wie auch als unerschöpfliche Fundgrube für den Forscher.

Heuns Schüler, Herr Hamel, hat 1916 in einem anscheinend noch nicht genügend beachteten Aufsatz dargelegt [51]), wie bei Lagrange, wenn auch nicht formuliert, ein Leitprinzip seines großen Werkes zu finden ist, durch das die vielfach nur als mathematische Hilfsgrößen angesehenen Lagrangeschen Multiplikatoren eine klare mechanische Kraftbedeutung bekommen. Es ist das von Herrn Hamel so genannte *Befreiungsprinzip*:

Gegeben sei ein beliebiges System. Eine seiner Bedingungsgleichungen sei $f = 0$ und λ der dazugehörige Parameter. Betrachtet man daneben ein System von höherem Freiheitsgrad, indem die Bedingung $f = 0$ weggelassen wird, so bewegt sich das befreite System nach formal denselben Gleichungen, nur daß jetzt λ eine eingeprägte Kraft ist, eindeutig bestimmt durch die physikalischen und kinematischen Bedingungen.

Lagrange ist es auch als erstem gelungen, die Hydromechanik mit denselben Verfahren wie die Mechanik der Punkte in starren Körpern zu behandeln, was schon Eugen Düring bemerkt.

Auch statistische Fragen haben Lagrange in Paris beschäftigt, nachdem er schon in Berlin eine Arbeit über verbundene Leibrenten verfaßt hatte unter Benutzung der Süßmilchschen Tafeln.

In einem Sammelband über Fragen der politischen Arithmetik, an dem auch Lavoisier beteiligt war, befindet sich aus seiner Feder eine statistische Untersuchung über die Frage, wie weit Frankreich sich selbst ernähren könne. Nach seinem Ergebnis liefert die französische Landwirtschaft genug Getreide, aber der Fleischbedarf ist nur etwas mehr als zur Hälfte gedeckt. Lagrange wollte als Verfasser dieser Denkschrift erst nicht genannt sein und gab erst auf wiederholtes Drängen des Herausgebers seine Einwilligung, der immer wieder darauf hinwies, welche Autorität gerade Lagrange in Frankreich damals genoß [52]). Besonders stark war er durch seine Lehrtätigkeit als Professor an der École Normale Supérieure und an der École Polytechnique in Anspruch genommen. An jener, die zur Heranbildung von Lehrern an höheren Schulen bestimmt war, hielt er Vorlesungen über Elementarmathematik, und diese sind noch 1880 [53]) in deutscher Übersetzung erschienen. Sie bieten auch heute noch reiche Anregung. Die Vorlesungen an der École Polytechnique behandeln die Funktionentheorie, und sie haben, zuerst durch Grüson [54]), später durch Crelle [55]) ins Deutsche übersetzt, großen Einfluß auch bei uns gehabt. Ohne die Mystik der unendlich kleinen Größen, wie sie naiv bei Euler auftreten, aber freilich auch ohne den Grenzbegriff entwickelt Lagrange die Differential- und Integralrechnung ausgehend von der Potenzreihe, durch die bei ihm die Funktion definiert wird. Mit ihm beginnt die zielbewußte Aufstellung und Diskussion des Restgliedes der Taylorschen Reihe. Er gewinnt seine Abschätzung durch den Mittelwertsatz, der bei ihm durch zwei Ungleichungen dargestellt wird. Lagrange hat alles Wesentliche geleistet in der genauen Darstellung des Restes durch ein bestimmtes Integral — das Integralzeichen vermeidet er allerdings. Er nimmt zwar, wie gesagt, die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe an, aber, wie Herr Pringsheim [56]) in einer großen geschichtlichen Untersuchung über den Taylorschen Satz ausdrücklich betont, keineswegs als Voraussetzung, sondern lediglich in der Annahme:

$$f(x+h) = f(x) + (f'(x) + \varepsilon)\, h$$

mit $h \gtrless 0$; $|\varepsilon|$ wird mit h beliebig klein.

In seinen letzten Jahren hat sich Lagrange auch mit dem Parallelenaxiom beschäftigt, über das um die Wende des 18. Jahrhunderts besonders viele Arbeiten erschienen waren. Lagrange hat aber nichts darüber veröffentlicht, im Gegenteil, als er in der Akademie seine darauf bezügliche Arbeit begonnen hatte vorzulesen, brach er plötzlich ab mit den Worten: „Ich muß darüber noch nachdenken".

Großes Ansehen genoß Lagrange auch in der napoleonischen Zeit. Wenige Tage vor seinem Tode erschienen drei Mitglieder der Akademie, unter ihnen Monge, bei ihm, um ihm im Auftrag Napoleons einen neuen hohen Orden zu überreichen. Er unterhielt sich noch zwei Stunden mit ihnen in der Ruhe und Resignation eines wahren Philosophen, wie es in einer Biographie heißt, die zwei ihm offenbar auch menschlich sehr nahe stehende Mediziner gleich nach dem am 10. April 1813 erfolgten Tod verfaßt haben [57]). An seinem Sarge knüpfte Laplace an das vorher von dem Präsidenten der Akademie angeführte wundervolle Wort an, das auf Newtons Grabdenkmal steht: *sibi gratulentur mortales tale tantumque exstitisse humani generis decus.* Er verglich den dahingegangenen Freund mit Newton: seinen mathematischen Takt, der ihn stets das Wichtigste erkennen ließ, und seine Eleganz in der Darstellung der abstrakten Theorie [58]). Wie Newton in der Westminster Abbey in London, ist Lagrange im Pantheon in Paris beigesetzt.

Mögen die Feiern, veranstaltet zur 200. Wiederkehr des Geburtstages dieses großen Mathematikers Lagrange, die jüngere mathematische Generation zu einem eifrigen Studium seiner Arbeiten anregen, aus denen nach Inhalt und Form auch für unsere Zeit noch so viel Anregungen zu schöpfen sind.

Anmerkungen.

[1]) Vergleiche die Zusammenstellung der zahlreichen Eulerfeiern und Veröffentlichungen über Euler zur Zweihundertjahrfeier seines Geburtstages, Jahresbericht der D. M. V. **16** (1907), S. 328 ff.

[2]) Vergleiche W. Lorey, Johann Heinrich Lambert, Sitzungsberichte der B. M. G. **28** (1929), S. 2—27.

[3]) Vollständiges bibliographisches Verzeichnis der in der Preußischen Akademie veröffentlichten Arbeiten Lagranges bei Harnack, Geschichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften **3**, S. 163—165.

[4]) A. Korn, Joseph Louis Lagrange, Sitzungsberichte der B. M. G. **12** (1913), S. 90—94.

[5]) Annali di Matematica pura e applicata (3) **20** u. **21** (1913).

[6]) Der letzte Band ist 1892 erschienen. Seitdem sind noch viele Briefe Lagranges bekannt geworden, über die C. Bopp in einer zur 100. Wiederkehr von Lagranges Todestag veröffentlichten Arbeit berichtet: Eine Schrift von Ensheim „Recherche sur le calcul différentiel et intégral" mit einem sich darauf beziehenden nicht in die „Oeuvres" übergegangenen Brief von Lagrange, analysiert und zum 10. April 1913 herausgegeben, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss., Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. A, 1913, 7. Abhandlung.

[7]) An biographischen Quellen wurden benutzt:
Delambre, Notices sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J. Lagrange, Oeuvres de Lagrange **1**, S. X—LI.
Virey et Potel, Précis historique sur la vie et la mort de Joseph Louis Lagrange, Paris 1813.
Ersch und Gruber, Encyklopädie der allgemeinen Wissenschaften, Leipzig 1865, Artikel Grange.
Niels Nielsen, Géomètres français sous la révolution, Copenhague 1929, S. 136—152.
Gino Loria, G. L. Lagrange nella vita e nelle opere, Annali di Matematica (3) **20** (1913), S. IX—LII.

[8]) Lagrange, Oeuvres **14**, S. 135—138.

[9]) Über diese Eulerschen Briefe an eine deutsche Prinzessin ist wiederholt im Briefwechsel zwischen d'Alembert und Lagrange die Rede. Beide urteilen nicht sehr günstig darüber.

[10]) Vergleiche Conrad Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Heft 18, Leipzig 1904.

[11]) In einem Brief vom 17. 9. 1798 an I. F. Pfaff in Helmstedt. Vergleiche W. Lorey, Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts, IMUK III, 9 (Leipzig und Berlin 1916), S. 26. Kaestner wird im Briefwechsel zwischen d'Alembert und Lagrange öfter genannt, allerdings und namentlich von d'Alembert nicht günstig. Lagrange schreibt aber doch von dem großen Ansehen, das Kaestner als Schriftsteller genießt. Bei Lambert genoß Kaestner ersichtlich großes Ansehen, wie sich aus dem von C. Bopp herausgegebenen Briefwechsel ergibt (Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss., Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. A, 1928, 18. Abhandlung).

[12]) Angeführt bei Ahrens, Scherz und Ernst in der Mathematik (Leipzig 1904), S. 124.

[13]) Vergleiche Harnack, a. a. O.[3]), Bd. **2**, S. 310 f.

[14]) Vergleiche W. Lorey, a. a. O.[11]), S. 32 f.

[15]) Vergleiche Burkhardt, Trigonometrische Reihen und Integrale, Encykl. d. Math. Wiss. II, 1, 2, S. 382.

[16]) Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert **1** (Berlin 1926), S. 292 f.

[17]) Über dieses „System der Natur" hat sich E. E. Kummer in einer seiner Festreden geäußert, Monatsberichte der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin 1869, S. 67—78.

[18]) Wortlaut der französisch gehaltenen Ansprache: vgl. Lagrange, Oeuvres **14**, S. 316. Die Verhandlungen der Akademie wurden damals wohl meistens noch in französischer Sprache abgehalten. Lagrange hat aber in seiner Berliner Zeit auch deutsch gelernt; er macht gelegentlich d'Alembert auf deutsch geschriebene Bücher aufmerksam.

[19]) Sprüche in Prosa; Natur IV, Nr. 950, Goethes Werke, Hempelsche Ausgabe.

[20]) Vergleiche W. Lorey, Goethes Stellung zur Mathematik in: Goethe als Seher und Erforscher der Natur, herausg. von Johannes Walter im Namen der Kaiserl. Leopold. Deutsch. Akademie der Naturforscher, 1930.

[21]) Laplace, Oeuvres **3**, S. 116. Bürmann, Professor an der Handelsakademie in Mannheim, hatte 1798 in Paris zwei Arbeiten eingereicht, über die Lagrange und Legendre sich anerkennend ausgesprochen haben und auch den Druck empfahlen. Sie betonen allerdings, daß die Bürmannsche Formel nicht als eine neue Entdeckung angesehen werden kann; aber sein Beweis sei neu und sinnreich. Genauer Wortlaut des Urteils bei Haß, Die Bürmannsche Reihe, ihre Ableitung, Bedeutung und Geschichte, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg **6** (1926), S. 187 f. Die Bürmannsche Arbeit scheint in Paris aber nicht gedruckt worden zu sein. Sie dürfte identisch sein mit seiner Arbeit *Essai characteristique combinatoire*, die den von Hindenburg herausgegebenen Band über *Kombinatorische Analysis und Derivationskalkül* (Leipzig 1803) eröffnet. Weitere Literatur über die Lagrangesche und Bürmannsche Reihe findet sich in einem ausführlichen Artikel Hankels, Lagranges Lehrsatz, in: Ersch und Gruber, Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaft und Künste, 1. Sektion, 79. Teil (1865), S. 353 ff. In neuester Zeit wird die Bürmannsche Reihe erwähnt bei Hermann Schmidt, Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen, Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 266—278.

[22]) Lagrange, Oeuvres **8**, S. 164. R. Baltzer, Elemente der Mathematik **1** (4. Aufl.), S. 266; vgl. auch eine Arbeit Baltzers in den Berichten der Leipziger Gesellschaft 1866, S. 353.

[23]) G. Hamel, Joseph Louis Lagrange. Zur Zweihundertjahrfeier seines Geburtstages, Naturwissenschaften 1936, S. 51—53.

[24]) Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag 1817 = Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 153.

[25]) Über Heis vgl. W. Lorey, Aus der mathematischen Vergangenheit Münsters, Kapitel III: Die Zeit von Eduard Heis, Semesterberichte Bonn-Münster **6** (Wintersemester 1934/35), S. 110—120.

[26]) Leipzig 1933. Vgl. auch W. Lorey, Teilbruchreihen, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften **40** (1934), S. 376 f.

[27]) E. Landau, Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, Annali di Matematica (3) **20** (1913), S. 1—28.

[28]) Gauß, Disquisitiones Arithmeticae § 222.

[29]) Vergleiche W. Lorey, Eulers Verdienste um die Geographie, Geographische Wochenschrift 1933.

[30]) Brief von Laplace an Lagrange vom 14. 2. 1782, Lagrange, Oeuvres **14**, S. 112. In dem Briefwechsel zwischen Lagrange, Laplace und d'Alembert ist wiederholt die Rede von dem Wunsch Laplaces, durch Vermittlung Lagranges auch eine Stelle an der Berliner Akademie zu erhalten.

[31]) P. Koebe, Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für die Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie, Annali di Matematica (3) **21**, S. 59. Lagrange, Sur la construction des Cartes géographiques, Oeuvres **4**, S. 637—692.

[32]) Lagrange, Oeuvres **4**, S. 330—339.

[33]) Lagrange, Oeuvres **3**, S. 661—692.

[34]) Lagrange, Oeuvres **7**, S. 331—359.

[35]) Lagrange, Oeuvres **7**, S. 280—283.

[36]) Vergleiche A. Braunmühl, Historische Untersuchungen der ersten Arbeiten über Interpolation, Bibliotheca mathematica (3) **2** (1901), S. 95.

[37]) Bauschinger, Interpolation, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 21, S. 812. Lagrange, Oeuvres **7**, S. 535.

[38]) G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur, Leipzig und Berlin 1933, S. 1.

[39]) Über Schulze, den „Schüler Lamberts" urteilt Lagrange in einem Brief an d'Alembert in einem Brief vom 27. Januar 1778 (Oeuvres **13**, S. 335 f.) sehr günstig. Schulze hat auch die Lagrangesche Abhandlung über Interpolation im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1783 deutsch herausgegeben. Das französische Original: Oeuvres **7**, S. 535—553. Vgl. auch Oeuvres **5**, 517—532 und 663—684.

[40]) R. Mehmke im Bericht über die Diskussion über die Dezimalteilung der Winkel und Zeitgrößen, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **8** (1900), S. 45.

[41]) Lagrange, Oeuvres **5**, S. 713—718.

[42]) Über diese Heirat vergleiche Brief d'Alemberts an Lagrange vom 21. 9. 1767 und Lagranges Antwort vom 20. 11. 1767. Später hat in Paris Lagrange die Tochter eines Astronomen geheiratet.

[43]) Dieudonné Thiebault, Souvenirs de vingt ans de sejour à Berlin **5** (Paris 1804), S. 38—42. Deutsche Übersetzung: Friedrich der Große oder 20 Jahre meines Aufenthaltes in Berlin, Leipzig 1828. III. Buch, S. 73.

[44]) Lagrange wohnte in Berlin Unter den Linden im Haus des Präsidenten Görmer. Vgl. Harnack a. a. O. [3]), Bd. **1**, S. 481.

[45]) Harnack a. a. O. [3]), Bd. **2**, S. 314—321. Aktenstücke zu Lagranges Entlassung.

[46]) Auf der Tempelhoffschen Vorschlagsliste steht an erster Stelle der Göttinger Lichtenberg, „nun der beste Mathematiker in Deutschland". Lichtenberg war aber Professor der Physik in Göttingen, wenn er auch mathematische Vorlesungen gehalten hat, z. B. 1770 über die Theorie der Kegelschnitte. Von deutschen Mathematikern sind dann noch genannt:

Professor Klügel in Helmstedt. Er war ein Schüler Kaestners, auf dessen Veranlassung er eine auch heute noch beachtenswerte Dissertation über die Beweisversuche für das Parallelenaxiom geschrieben hat. Bekannt ist ja auch noch sein oben erwähntes mathematisches Lexikon.

Professor Tetens in Kiel, das damals freilich zu Dänemark gehörte. Er ist zu Tettenbül im Herzogtum Schleswig geboren. In der Versicherungsmathematik ist erheute noch durch seine Einführung der diskontierten Zahlen der Lebenden bekannt.

Johann Tobias Meyer in Altorf, „ein Sohn des berühmten Göttinger Astronomen Tobias Meyer".

Professor Hennert aus Utrecht. In Berlin geboren, hat er mehrere Preisarbeiten der Akademie mit Erfolg behandelt. Seine Arbeiten betreffen meistens astronomische und hydraulische Fragen.

Von Nichtdeutschen wird der Genfer l'Huilier vorgeschlagen. Nach ihm werden noch heute einige Formeln für den sphärischen Exzeß genannt. Er hatte 1786 den Preis der Akademie für eine Arbeit über den mathematischen Begriff des Unendlichen erhalten.

[47]) Harnack a. a. O. [45]). Die Behauptung R. Wolfs, der Minister Hertzberg habe Lagrange den Aufenthalt in Berlin verleidet, stimmt wohl nicht.

[48]) Lagrange, Oeuvres **14**, S. 314 f.

[49]) Vergleiche Conrad Müller a. a. O. [10]), S. 128.

[50]) K. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, Jahresber. d. D. M. V. **9** (1901), zweites Heft.

[51]) Georg Hamel, Über ein Prinzip der Befreiung bei Lagrange, Jahresbericht der D. M. V. **25** (1917), S. 60—65.

[52]) Lagrange, Oeuvres **7**, S. 571—579. Die Arbeit über Leibrenten: Oeuvres **5**, S. 613—624.

[53]) Übersetzt von H. Niedermüller, Leipzig 1880. Über die École Normale vergl. Lacroix, Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particuliaire, Paris 1838, S. 30 f.

[54]) Grüson, der auch Mitglied der Berliner Akademie war, hat Lagrange brieflich auf ein Versehen in der ersten Auflage aufmerksam gemacht, das Lagrange nachher in der zweiten Auflage verbessert hat. Oeuvres **14**, S. 289—293. Grüson hat auch die Analytische Mechanik 1798 deutsch herausgegeben.

[55]) Crelle hat Lagranges mathematische Werke in drei Bänden (Berlin 1824) herausgegeben. Er bringt darin auch den Nachruf von Delambre. Durch diese Übersetzung hat der für die Mathematik mit solcher Begeisterung wirkende Gründer des *Journals für die reine und angewandte Mathematik* ganz besonders in Deutschland zur Bekanntschaft mit den Lagrangeschen Arbeiten beigetragen.

[56]) A. Pringsheim, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes, Bibliotheca mathematica (3) **1** (1900), S. 440—480.

[57]) Virey et Potel, a. a. O. [7]).

[58]) Funérailles de Lagrange, Institut Imperial de France 1813.

Eingegangen 5. März 1936.

Vom Cauchyschen Integralsatz zur Cauchyschen Integralformel.

Von *Lothar Heffter* in Freiburg i. B.

Aus der Gültigkeit des Cauchyschen Integral*satzes allein*, d. h. aus dem Verschwinden des Integrals $\int f(z)\,dz$ für jedes achsenparallele Rechteck R eines Gebietes G, dürfte sich noch nicht der analytische Charakter von $f(z)$ in G, d. h. die Entwickelbarkeit von $f(z)$ in der Umgebung jedes Punktes von G in eine Potenzreihe, herleiten lassen. Wohl aber ist das der Fall, wenn die Cauchysche Integral*formel* in G gilt. Die Frage ist also: Unter welchen weiteren Voraussetzungen über $f(z)$ kann man von dem Integral*satz* zu der Integral*formel* gelangen? Aus dem Satz von *Morera* [1]) folgt indirekt, daß dazu die *Stetigkeit* von $f(z)$ genügt. Der Beweis dieses Satzes greift bekanntlich auf die Funktion $F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ zurück und setzt voraus, daß der Cauchysche Integralsatz in seiner ältesten Form für eine stetige Funktion mit stetiger Ableitung bewiesen ist.

Bei einer so grundlegenden Frage scheint es mir aber von Bedeutung, daß man, auch *ohne* auf $F(z)$ zurückzugreifen und *ohne* den Cauchyschen Integralsatz auch nur in jener ältesten Form vorauszusetzen, dessen Beweis hier vielmehr nebenbei abfällt, direkt für die stetige Funktion $f(z)$ selbst, für die der Cauchysche Integral*satz* gilt, die Integral*formel* und daraus alles weitere gewinnen kann. Natürlich wird damit zugleich auch ein neuer Beweis für den Satz von *Morera* gegeben. Dies leistet der folgende Hauptsatz (bei dem die *Stetigkeit* von $f(z)$ auch durch viel knappere Voraussetzungen ersetzt werden könnte):

Hauptsatz. *Ist die in G eindeutig definierte und stetige Funktion $f(z)$ in G auch eindeutig integrierbar, d. h. ist für jedes achsenparallele, ganz zu G gehörige Rechteck R $\int_R f(z)\,dz = 0$, und ist $h(z)$ eine mit ihrer Ableitung $h'(z)$ in G stetige Funktion, so ist auch* $\int_R f(z)\,h(z)\,dz = 0$.

Man braucht dann nur $h(z)$ geeignet zu wählen und erst für den erforderlichen Grenzübergang (III) die Stetigkeit von $f(z)$ notwendig vorauszusetzen, um von dem Integralsatz für $f(z)\,h(z)$ zu der Integralformel für $f(z)$ zu kommen. Dabei wird mit ganz elementaren Mitteln gearbeitet, nämlich mit einfachen reellen Integralen von Funktionen einer reellen Variablen.

---

[1]) G. Morera, Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, Rend. R. Ist. Lomb. (2) **19** (1886), S. 304—307.

I. *Der Cauchysche Integralsatz.*

Sind $f(x, y)$, $g(x, y)$ zwei im Gebiet G eindeutige reelle Funktionen, f in bezug auf x bei jedem y, g in bezug auf y bei jedem x *integrabel* [2]), so ist der (reelle) Cauchysche Integralsatz

$$\int_R [f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy] = 0\,, \tag{1}$$

wo $R \equiv [(a, \alpha)\,(b, \beta)]$ ein beliebiges, ganz zu G gehöriges achsenparalleles Rechteck ist, *gleichbedeutend* mit der für jedes solche Rechteck geltenden Gleichheit der Differenzenquotienten

$$\frac{f_{ab}(x, \alpha) - f_{ab}(x, \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{g_{\alpha\beta}(a, y) - g_{\alpha\beta}(b, y)}{a - b}\,, \tag{2}$$

wo z. B. $f_{ab}(x, \alpha)$ den Mittelwert von $f(x, \alpha)$ in (a, b) bedeutet, d. h.

$$f_{ab}(x, \alpha) \equiv \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx\ ^{3})\,. \tag{3}$$

Gilt der Cauchysche Integralsatz bei jedem Rechteck R für die Funktion $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$, d. h. ist

$$\int_R f(z)\,dz \equiv \int_R (u dx - v dy) + i\int_R (v dx + u dy) = 0\,, \tag{4}$$

so bedeutet das also nach (2), daß u und v in G in bezug auf jede der beiden Variabeln bei jedem Wert der andern integrabel sind und daß in jedem Rechteck R die beiden Differenzengleichungen gelten

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ab}(x, \alpha) - u_{ab}(x, \beta)}{\alpha - \beta} = -\dfrac{v_{\alpha\beta}(a, y) - v_{\alpha\beta}(b, y)}{a - b} \\ \dfrac{v_{ab}(x, \alpha) - v_{ab}(x, \beta)}{\alpha - \beta} = \dfrac{u_{\alpha\beta}(a, y) - u_{\alpha\beta}(b, y)}{a - b}\,. \end{cases} \tag{5}$$

II. *Beweis des Hauptsatzes.*

$f(z)$ sei in G stetig und erfülle in jedem Rechteck R die Gleichung (4) oder — was dasselbe ist — die Gleichungen (5). $h(z)$ und $h'(z)$ seien stetig, d. h. wenn $h(z) \equiv \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, die Funktionen φ, ψ, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 seien stetig und die Gleichungen

$$\varphi_2 = -\psi_1, \quad \varphi_1 = \psi_2 \tag{6}$$

erfüllt. Dann ist die Behauptung des Hauptsatzes:

$$\int_R f(z)\,h(z)\,dz \equiv \int_R [(u\varphi - v\psi)\,dx - (u\psi + v\varphi)\,dy] + i\int_R [(u\psi + v\varphi)\,dx + (u\varphi - v\psi)\,dy] = 0\,. \tag{7}$$

Um zu zeigen, daß das erste der Integrale rechts gleich 0 ist, teilen wir die Seiten (a, b) und (α, β) von R in n gleiche Teile durch die Teilpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ und zerlegen R durch Parallele zu den Achsen durch die Teilpunkte in n^2

---

[2]) Weniger kann man also von den Funktionen f und g nicht voraussetzen, wenn überhaupt von dem Integral (1) die Rede sein soll.

[3]) Auf diese triviale Form des Cauchyschen Integralsatzes, die uns hier vollkommen genügt, habe ich schon in meiner Arbeit: Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale, Gött. Nachr. 1902, S. 115—140, hier S. 131 aufmerksam gemacht. Immerhin zeigt (2) bereits den Ursprung der Bedingung $f_2 = g_1$.

kleinere Rechtecke $R_{\mu\nu} \equiv [(x_\mu\, y_\nu)\,(x_{\mu+1}\, y_{\nu+1})]$. Dann bilden wir nach der oft bewährten Methode [4]) die Doppelsumme

$$(8)\quad \sum_{\mu,\nu} S_{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu,\nu} [u_{\mu,\mu+1}(x, y_\nu)\,\varphi(x_\mu, y_\nu) - u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi(x_\mu, y_{\nu+1}) - v_{\mu,\mu+1}(x, y_\nu)\,\psi(x_\mu, y_\nu) + v_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi(x_\mu, y_{\nu+1})]\,(x_{\mu+1} - x_\mu) - \sum_{\mu,\nu} [-u_{\nu,\nu+1}(x_\mu, y)\,\psi(x_\mu, y_\nu) + u_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\psi(x_{\mu+1}, y_\nu) - v_{\nu,\nu+1}(x_\mu, y)\,\varphi(x_\mu, y_\nu) + v_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\varphi(x_{\mu+1}, y_\nu)]\,(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Führt man in der ersten Teilsumme die Summation über $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ bei festem μ, in der zweiten die über dieselben Werte von μ bei festem ν aus, so heben sich alle über die inneren Strecken gebildeten Terme fort, und es folgt

$$(9)\quad \sum_{\mu,\nu} S_{\mu\nu} = \sum_{\mu} [u_{\mu,\mu+1}(x, \alpha)\,\varphi(x_\mu, \alpha) - u_{\mu,\mu+1}(x, \beta)\,\varphi(x_\mu, \beta) - v_{\mu,\mu+1}(x, \alpha)\,\psi(x_\mu, \alpha) + v_{\mu,\mu+1}(x, \beta)\,\psi(x_\mu, \beta)]\,(x_{\mu+1} - x_\mu) - \sum_{\nu} [-u_{\nu,\nu+1}(a, y)\,\psi(a, y_\nu) + u_{\nu,\nu+1}(b, y)\,\psi(b, y_\nu) - v_{\nu,\nu+1}(a, y)\,\varphi(a, y_\nu) + v_{\nu,\nu+1}(b, y)\,\varphi(b, y_\nu)]\,(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Also ist

$$(10)\quad \lim_{n\to\infty} \Sigma S_{\mu\nu} = \int_R [(u\varphi - v\psi)\,dx - (u\psi + v\varphi)\,dy]$$ [5]).

Andererseits aber ist $\lim \Sigma S_{\mu\nu} = 0$. Denn setzt man in (8)

$$(11)\quad \begin{cases} \varphi(x_\mu, y_{\nu+1}) = \varphi(x_\mu, y_\nu) + \varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu})\,(y_{\nu+1} - y_\nu), & \text{wo } \eta_{\mu\nu} \text{ in } (y_\nu, y_{\nu+1}) \\ \psi(x_\mu, y_{\nu+1}) = \psi(x_\mu, y_\nu) + \psi_2(x_\mu, \eta'_{\mu\nu})\,(y_{\nu+1} - y_\nu), & \quad ,, \ \eta'_{\mu\nu} \ ,, \quad ,, \\ \varphi(x_{\mu+1}, y_\nu) = \varphi(x_\mu, y_\nu) + \varphi_1(\xi_{\mu\nu}, y_\nu)\,(x_{\mu+1} - x_\mu), & \quad ,, \ \xi_{\mu\nu} \ ,, \ (x_\mu, x_{\mu+1}) \\ \psi(x_{\mu+1}, y_\nu) = \psi(x_\mu, y_\nu) + \psi_1(\xi'_{\mu\nu}, y_\nu)\,(x_{\mu+1} - x_\mu), & \quad ,, \ \xi'_{\mu\nu} \ ,, \quad ,, \ , \end{cases}$$

so heben sich unter Benutzung der Formeln (5) für das Rechteck $R_{\mu\nu}$ alle Glieder mit den Faktoren $\varphi(x_\mu, y_\nu)$ und $\psi(x_\mu, y_\nu)$ in $S_{\mu\nu}$ fort, und, wenn man nach (6) noch $\psi_1 = -\varphi_2$, $\psi_2 = \varphi_1$ setzt, so bleibt

$$(12)\quad S_{\mu\nu} = [-u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu}) + v_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi_1(x_\mu, \eta'_{\mu\nu}) + u_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\varphi_2(\xi'_{\mu\nu}, y_\nu) - v_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\varphi_1(\xi_{\mu\nu}, y_\nu)]\,(x_{\mu+1} - x_\mu)\,(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Da u und φ_2, ebenso v und φ_1 in dem Rechteck R stetig, also gleichmäßig stetig sind und da alle in dem allgemeinen Summenglied (12) auftretenden Wertepaare von x, y demselben Teilrechteck $R_{\mu\nu}$ angehören, so ist, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, bei hinlänglich großem n

$$(13)\quad \varphi_2(\xi'_{\mu\nu}, y_\nu) = \varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu}) + \vartheta\varepsilon \qquad (-1 < \vartheta < 1)$$

---

[4]) Vgl. meine Arbeiten: Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale, Gött. Nachr. 1902, S. 136 f. — Über den Cauchyschen Integralsatz, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 476—480, und **34** (1931), S. 473—476. — Notwendige und hinreichende Bedingungen für den Cauchyschen Integralsatz ohne Benutzung von Differentialquotienten, Sitz.-Ber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss. 1932, 5. Abhdlg. In dieser letzten Arbeit kann übrigens auf die Stetigkeit vollkommen verzichtet werden, da ja auch bei einer nur integrablen Funktion die Mittelwerte oder beliebige Zwischenwerte zur Integralbildung benutzt werden können.

[5]) Denn sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei in (a, b) integrable und überdies beschränkte Funktionen, so ist leicht zu zeigen, daß auch $f(x)\,g(x)$ in (a, b) integrabel ist und bei der Bildung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu\, g_\mu (x_{\mu+1} - x_\mu)$$

für f_μ und g_μ je ein beliebiger Wert zwischen der unteren und der oberen Grenze der Werte von $f(x)$ und $g(x)$ in $(x_\mu, x_{\mu+1})$ genommen werden darf.

$$u_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y) = u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1}) + \vartheta'\varepsilon \quad (-1 < \vartheta' < 1). \tag{14}$$ [6]

Das erste und das dritte Glied der [ ] in (12) liefern also zusammen

$$u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\vartheta\varepsilon + \varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu})\vartheta'\varepsilon + \vartheta\vartheta'\varepsilon^2. \tag{15}$$

Entsprechend wird das zweite und vierte Glied umgeformt. Bezeichnet man dann den Maximalwert von $|u|$, $|v|$, $|\varphi_1|$, $|\varphi_2|$ im Rechteck R mit M, so folgt

$$|\Sigma S_{\mu\nu}| \leqq \frac{b-a}{n}\,\frac{\beta-\alpha}{n}\cdot 2\varepsilon(2M+\varepsilon)n^2 = 2\varepsilon(b-a)(\beta-\alpha)(2M+\varepsilon), \tag{16}$$

d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma S_{\mu\nu} = 0. \tag{17}$$

Durch (10) und (17) ist gezeigt, daß das erste der Integrale in (7) rechts gleich 0 ist. Das zweite geht aber aus dem ersten hervor, wenn man φ durch ψ, ψ durch $-\varphi$ ersetzt, wobei das Formelpaar (6) ungeändert bleibt. Also gilt der Beweis auch für das zweite Integral in (7). — Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Wählt man speziell $f(z) = 1$, also $u = 1$, $v = 0$, wobei alle Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt sind, so liefert dieser die Gleichung

$$\int_R h(z)\,dz = 0, \tag{18}$$

d. h. den Cauchyschen Integralsatz in seiner ältesten Form für eine Funktion $h(z)$ mit stetiger Ableitung $h'(z)$. Selbstverständlich reduziert sich dabei der vorstehende Beweis auf wenige Zeilen, wie ich ihn mit der Doppelsummenmethode schon 1902 geführt habe [7]).

III. *Die Cauchysche Integralformel für $f(z)$.*

Ist z irgendein Wert im Gebiet G, so ist

$$h(t) \equiv \frac{1}{t-z} \tag{19}$$

eine Funktion von t, die in jedem Teilbereich von G, der z nicht enthält, die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt. Umgibt man also z als Mittelpunkt mit einem kleinen Quadrat Q von der Seitenlänge $2k$, und ist T eine einfache geschlossene Treppenlinie, die ganz im Gebiete G verläuft und einen Teil von G begrenzt, so folgt aus dem Hauptsatz

$$\int_T \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \int_Q \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0, \tag{20}$$

wobei beide Integrationen in demselben Sinn, etwa dem positiven des Koordinatensystems, zu erstrecken sind. Das zweite Integral soll berechnet werden. Da es aber für jedes Rechteck, das z *nicht* enthält, gleich 0 ist, so kann Q, d. h. k, ohne Wertänderung des Integrals beliebig klein gewählt werden. Gerade für diesen Schluß war der Hauptsatz notwendig. Wenn also noch gezeigt wird, daß für $k \to 0$ das über Q erstreckte Integral sich einem bestimmten endlichen Grenzwert nähert, so ist dieser der gesuchte Integralwert. Hierfür erst dürfte die *Stetigkeit* von $f(z)$ unentbehrlich sein.

---

[6]) Von hier an muß der Beweis abgeändert werden, wenn statt der Stetigkeit von $f(z)$ anderes vorausgesetzt wird. Ist z. B. $\delta_{\mu\nu}$ die Maximalschwankung von $u(x, y_{\nu+1})$ in $(x_\mu, x_{\mu+1})$, $\delta'_{\mu\nu}$ die von $u(x_{\mu+1}, y)$ in $(y_\nu, y_{\nu+1})$, so genügen die Voraussetzungen

$$\sum_{\mu,\nu} \delta_{\mu\nu}(x_{\mu+1} - x_\mu) < n\varepsilon, \qquad \sum_{\mu,\nu} \delta'_{\mu\nu}(y_{\nu+1} - y_\nu) < n\varepsilon$$

nebst den entsprechenden für $v(x, y)$, um den Beweis zu führen. Diese Voraussetzungen enthalten *weniger* als die Stetigkeit und weniger als eine Eigenschaft, die man „gleichmäßige Integrabilität" von u und v in R in bezug auf jede der beiden Variabeln bei allen Werten der andern nennen könnte.

[7]) a. a. O. [3]), S. 136 f.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, es sei $z = 0$, was ja durch eine Koordinatenverschiebung erreicht werden kann. Dann ist zu untersuchen

$$(21)\quad \lim_{k\to 0}\int_Q \frac{f(t)\,dt}{t} \equiv \lim_{k\to 0}\int_Q \frac{(ux+vy)\,dx+(uy-vx)dy}{x^2+y^2} + i\lim_{k\to 0}\int_Q \frac{(vx-uy)\,dx+(ux+vy)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Das erste Integral rechts ist

$$(22)\quad \int_{-k}^{+k}[u(x,-k)-u(x,k)]\frac{x\,dx}{x^2+k^2} - \int_{-k}^{+k}[v(x,-k)+v(x,k)]\frac{k\,dx}{x^2+k^2} + \int_{-k}^{+k}[u(k,y)-u(-k,y)]\frac{y\,dy}{y^2+k^2} - \int_{-k}^{+k}[v(k,y)+v(-k,y)]\frac{k\,dy}{y^2+k^2} \equiv J_1 - J_2 + J_3 - J_4.$$

Da bei J_2 der zweite Faktor in $(-k, k)$ stets positiv ist, so ist nach dem Mittelwertsatz

$$(23)\quad J_2 = [v(\vartheta k,-k)+v(\vartheta k,k)]\int_{-k}^{+k}\frac{k\,dx}{x^2+k^2} = [v(\vartheta k,-k)+v(\vartheta k,k)]\frac{\pi}{2} \qquad (-1<\vartheta<1),$$

also wegen der Stetigkeit von v

$$(24)\quad \lim_{k\to 0} J_2 = v(0,0)\,\pi.$$

Ebenso ergibt sich $\lim J_4 = v(0,0)\,\pi$, also

$$(25)\quad \lim_{k\to 0}(-J_2 - J_4) = -2\pi\, v(0,0).$$

Bezeichnet man in J_1 den Maximalwert von $|u(x,-k)-u(x,k)|$ in $(-k, k)$ mit M_k, so daß $\lim_{k\to 0} M_k = 0$, so ist

$$(26)\quad |J_1| \leqq \int_{-k}^{+k} M_k\,\frac{k}{k^2}\,dx = 2M_k.$$

Also ist $\lim J_1 = 0$, und ebenso folgt $\lim J_3 = 0$.

Somit hat man

$$(27)\quad v(0,0) = -\frac{1}{2\pi}\int_Q \frac{(ux+vy)\,dx+(uy-vx)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Da das zweite Integral in (21) aus dem ersten entsteht, wenn man u durch v, v durch $-u$ ersetzt, so ist

$$(28)\quad u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_Q \frac{(vx-uy)\,dx+(ux+vy)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Aus den letzten beiden Formeln und (21) ergibt sich also

$$(29)\quad f(0) \equiv u(0,0)+iv(0,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_Q \frac{f(t)\,dt}{t},$$

und wenn man wieder an Stelle von 0 den beliebigen Wert z setzt, so erhält man nach (20) und (29) in

$$(30)\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

die Cauchysche Integralformel in der üblichen Gestalt. Schließlich kann man darin, obwohl es nicht nötig ist, die Treppenlinie T auch durch eine beliebige Kurve C, die z umschließt, ersetzen, weil ja C durch eine Treppenlinie beliebig approximiert werden kann.

Von hier aus verläuft die Entwicklung des Integrals (30) in eine Potenzreihe in der altbekannten Weise.

IV. *Schlußfolgerung.*

Es hat sich ergeben: Wenn die in einem Gebiet G in bezug auf x bei jedem y, in bezug auf y bei jedem x integrable Funktion $f(z)$ für jedes achsenparallele, ganz zu G gehörige Rechteck R die Differenzengleichungen (5) erfüllt, so gilt für jede geschlossene Treppenlinie, die ganz zu G gehört und einen Teil von G begrenzt, der Cauchysche Integralsatz. Ist $f(z)$ überdies stetig, so gilt für sie auch die Cauchysche Integralformel und $f(z)$ ist eine analytische Funktion in G.

Hiernach ist der Versuch, den Cauchyschen Integral*satz* für $f(z)$ mit noch einfacheren Voraussetzungen über $f(z)$ zu beweisen, *völlig zwecklos*. Denn die Voraussetzungen (5) decken sich ja mit ihm. Denkbar wäre höchstens die Möglichkeit, daß beim Übergang zu der Cauchyschen Integral*formel*, also beim Beweis des Hauptsatzes oder bei dem Grenzübergang in III die Voraussetzungen über $f(z)$ noch weiter verringert werden könnten. Daß beim Beweis des Hauptsatzes die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(z)$ in der Tat durch eine viel weniger enthaltende ersetzt werden kann, wurde schon in der Einleitung erwähnt und in Anmerkung 6 genauer angedeutet. Der Grenzübergang in III dürfte freilich wohl unvermeidbar und für ihn die Stetigkeit von $f(z)$ unentbehrlich sein.

Freiburg i. B., Februar 1936.

Eingegangen 13. März 1936.

Einheitentheorie in rationalen hyperkomplexen Systemen.

Von *Otto F. G. Schilling*, z. Zt. in Princeton.

Über die Theorie der Einheitengruppen in Maximalordnungen einfacher rationaler Algebren ist nicht sehr viel bekannt. In der Theorie der automorphen Funktionen wurden einige spezielle Einheitengruppen und ihre Kongruenzuntergruppen untersucht. Bekanntlich kann die unimodulare ganzzahlige Gruppe der Matrizen vom Grade zwei durch zwei Erzeugende $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ erschöpft werden. Zusammen mit der Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ erhält man so die volle Einheitengruppe einer speziellen Maximalordnung in der vollständigen Matrixalgebra vom Grade zwei über dem rationalen Zahlkörper. Weiter wurden noch die Picardsche Gruppe und einige eng damit verwandte Gruppen untersucht. In allen diesen Fällen konnte die Existenz einer *endlichen* Basis festgestellt werden. So liegt die Frage nahe, ob die *Einheitengruppen von Maximalordnungen aus beliebigen endlichen einfachen rationalen Algebren eine endliche Basis besitzen*, d. h. ob endlich viele zur betrachteten Maximalordnung gehörige Einheiten so existieren, daß jede Einheit der Maximalordnung als endliches Wort in jenen endlich vielen Einheiten geschrieben werden kann.

In dieser Note soll eine vollständige Lösung des Problems im Falle der vollständigen Matrixalgebren über Zahlkörpern gegeben werden. Mit den hier angewandten Methoden ist es im allgemeinen Falle nur möglich, die Einheitengruppen als Untergruppen von Gruppen mit endlicher Basis nachzuweisen. Hieraus kann bekanntlich im allgemeinen nichts über die feinere Struktur der betreffenden Gruppen geschlossen werden.

Zum Schluß werden die maximalen abelschen Untergruppen von Divisionsalgebren beschrieben.

§ 1.

Es mögen im folgenden durchweg bezeichnen

$\mathsf{P}^{(0)}$ den Körper aller rationalen Zahlen,

$\mathfrak{R}$ den Körper aller reellen Zahlen oder einen dazu isomorphen Körper,

A eine einfache normale Algebra vom Grade n über einem endlichen algebraischen Zahlkörper k vom Grade n_0 (also ist A vom Rang $n^2 n_0 = n^*$ über $\mathsf{P}^{(0)}$),

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, ... Maximalordnungen von A,

$\mathfrak{O}$, ... Ordnungen vom Höchstrang n^* aus A,

$\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$, $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}^*}$, $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$, ... die Einheitengruppen von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{O}$, ...

Wenn $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ eine beliebige (später eine passend gewählte) $\mathsf{P}^{(0)}$-Basis von A bezeichnen, so wird in geläufiger Weise das direkte Produkt

$$A \times \mathfrak{R} = A_{\mathfrak{R}}$$

als die Gesamtheit aller formalen Summen $\sum_{i=1}^{n^*} x_i \omega_i$ mit Koeffizienten x_i aus dem Körper $\Re$ definiert. Das System $A \times \Re$ ist ein halbeinfacher Ring, wenn wir das Verknüpfungsgesetz $\omega_i \omega_j = \sum_{k=1}^{n^*} c_{ij}^k \omega_k$ zwischen den Basisgrößen beim Übergang von A zur Erweiterung $A \times \Re$ beibehalten (c_{ij}^k in $\mathsf{P}^{(0)}$; $i, j = 1, \ldots, n^*$).

Jedem Element $x = \sum_i x_i \omega_i$ ordnen wir einen Punkt

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n^*})$$

im n^*-dimensionalen reellen Raume R_{n^*} eineindeutig zu. Dann bestimmt die rechts- (bzw. links-) seitige Multiplikation der Elemente x mit Einheiten ε aus einer Ordnung der Algebra A eine diskrete Transformationsgruppe

$$(\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\varepsilon)$$

im Raume R_{n^*}.

Nehmen wir speziell für die Basis $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ die Elemente einer Normalbasis — d. h. eine Basis bezüglich des Ringes $\Gamma^{(0)}$ aller ganzen Zahlen — einer Ordnung $\mathfrak{O}$, so bilden die den Elementen der Ordnung zugeordneten Punkte ein Gitter mit der Seitenlänge eins. Einer echten Unterordnung entspricht dann ein Teilgitter mit größerer Fundamentalmasche.

Dem Wechsel einer Basis entspricht eine affine Transformation des Raumes R_{n^*}.

Die Norm des allgemeinen Elementes $x = \sum_i x_i \omega_i$ ist eine homogene Funktion $N(\mathfrak{x})$ auf dem Raume R_{n^*}.

Dann liegen alle Punkte $\mathfrak{x}$ aus R_{n^*}, die der Gleichung

$$|N(\mathfrak{x})| = 1$$

genügen, auf einer Hyperfläche H des Raumes R_{n^*}.

Die Einheitengruppen beliebiger Ordnungen erzeugen Operatorgruppen auf der Hyperfläche H, denn

$$|N(\mathfrak{x})| = 1 \to |N(\mathfrak{x}\varepsilon)| = |N(x\varepsilon)| = |Nx\, N\varepsilon| = |Nx|\,|N\varepsilon| = 1.$$

Wenn wir für $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ die Minimalbasis einer festen Ordnung $\mathfrak{O}$ vom Höchstrang nehmen, so gilt der folgende [1])

Satz 1. $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *ist eigentlich diskontinuierlich auf* H.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, daß zu jeder beschränkten Punktmenge V auf H eine endliche Anzahl von Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\lambda$ aus $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ existiert derart, daß jede Äquivalenz bezüglich $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ zweier beliebiger Punkte von V durch jene ε_i erhalten werden kann.

Es mögen also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}\varepsilon$ zwei äquivalente Punkte von V sein. Wegen der Homogenität der Funktion $N(\mathfrak{x})$ und wegen $|N(\mathfrak{x})| = 1$ auf der Hyperfläche H sind die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{x}^{-1} = x^{-1}$ beschränkt, wenn die Koeffizienten von x beschränkt sind.

Dann sind aber auch die Koeffizienten von $\varepsilon = x^{-1} \cdot x\varepsilon$ beschränkt, und zwar durch eine Schranke, die allein von der Menge V abhängt. Das ist aber gleichbedeutend mit der Endlichkeit der Anzahl λ.

Dann existiert zu jedem Punkt von V eine endliche Anzahl bezüglich $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ äquivalenter Punkte in V. Das heißt aber, daß $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ eigentlich diskontinuierlich ist.

Folgerung. Zu $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *existiert ein Fundamentalbereich* $F_{\mathfrak{O}}$ *auf* H.

Das folgt sofort aus der Endlichkeit von λ nach einem Satze von Poincaré [2]).

---

[1]) Wir geben hier der Vollständigkeit halber die von Käte Hey gegebenen Beweise der Sätze 1 und 2 wieder. Vgl. K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Dissertation Hamburg 1929.

[2]) G. Fubini, Introduzione alla teoria dei gruppi discontinni e delle funzioni automorfe, Pisa 1908, Kap. 6.

Sei wieder $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt von H, dann bilden alle Punkte der Form $\mathfrak{x}\,\xi$ mit ξ aus $\mathfrak{O}$ einen Modul $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, der die Ordnung $\mathfrak{O}$ als rechtsseitigen Operatorenring besitzt. Dem Modul $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ entspricht im Raume R_{n^*} ein Gitter, welches Teilgitter des ganzzahligen Gitters (auf $\mathfrak{O}$ bezogen) ist. Das Volumen einer Fundamentalmasche ist gleich $|N(\mathfrak{x})| = 1$ Dann gilt der folgende Hilfssatz, den man nach dem Vorbild des Endlichkeitsnachweises der Klassenzahlen in Zahlkörpern oder Divisionsalgebren beweist.

Hilfssatz. 1. Zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ von H existiert ein Element ξ von $\mathfrak{O}$ derart, daß die Koordinaten $x_i(\mathfrak{x}\,\xi)$ von $\mathfrak{x}\,\xi$ beschränkt sind:

$$|x_i(\mathfrak{x}\,\xi)| \leqq \sqrt[n]{|N(\mathfrak{x})|} = 1.$$

2. Wenn

$$C = \operatorname*{Max}_{\substack{\mathfrak{y}=\Sigma y_i\omega_i \\ |y_i|\leqq 1}} N(\mathfrak{y})$$

gesetzt wird, so gilt für alle gemäß 1. bestimmten Elemente ξ die Ungleichung

$$|N(\mathfrak{x}\,\xi)| \leqq C \quad \text{oder} \quad |N(\xi)| \leqq C.$$

Hieraus folgt

Satz 2. *Die Fundamentalbereiche $F_{\mathfrak{O}}$ sind stets endlich.*

Beweis. Es existiert nur eine endliche Zahl von Linksidealen $\mathfrak{O}\xi_1, \ldots, \mathfrak{O}\xi_r$ derart, daß $|x_i(\mathfrak{x}\,\xi)| \leqq 1$ ist. Jedes Element ξ, das diese Bedingungen erfüllt, ist einem der Elemente ξ_k assoziiert:

$$\xi = \varepsilon_{\mathfrak{x}}\,\xi_k,$$

wo die Einheit $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ von ξ, also allein von $\mathfrak{x}$ abhängt.

Aus

$$|x_i(\mathfrak{x}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{x}}\,\xi_k)| \leqq 1$$

folgt

$$|x_i(\mathfrak{x}\,\varepsilon_{\mathfrak{x}})| \leqq B.$$

Die positive reelle Zahl B hängt nur von den endlich vielen ξ_k ab, also nur von der Zahl C, die eine Invariante der Ordnung $\mathfrak{O}$ ist.

Aus diesen Gründen liegt in dem Würfel

$$|x_i| \leqq B$$

zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ von H höchstens ein äquivalenter Punkt $\mathfrak{x}\,\varepsilon_{\mathfrak{x}}$. Deshalb ist $F_{\mathfrak{O}}$ endlich.

Wenn wir nun speziell für die $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ die Normalbasis einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ von A wählen, so liegen die einer echten Unterordnung $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{M}$ entsprechenden Gitterpunkte in einem Teilgitter des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Gitters. Da $\mathfrak{O}$ vom Höchstrang sein sollte, sind die Maschen von $\mathfrak{O}$ aus endlich vielen von $\mathfrak{M}$ zusammengesetzt. (Das explizite Maß für die „Vergrößerung" wird durch den absoluten Betrag der Determinante einer Überführungstransformation von einer Basis von $\mathfrak{M}$ zu einer Basis von $\mathfrak{O}$ bestimmt.) Da die Einheitengruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ in der Gruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ enthalten ist, so folgt unmittelbar

$$F_{\mathfrak{M}} \leqq F_{\mathfrak{O}}.$$

Satz 3. $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *ist Untergruppe von endlichem Index $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}$ in* $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Da die Fundamentalbereiche $F_{\mathfrak{O}}$ und $F_{\mathfrak{M}}$ endlich sind, können nur endlich viele Nebenklassen auftreten.

Wenn wir Integrale in R_{n^*} einführen, so sind die Volumina

$$\int_{F_{\mathfrak{M}}} d\mathfrak{x} = (F_{\mathfrak{M}}) \quad \text{und} \quad \int_{F_{\mathfrak{O}}} d\mathfrak{x} = (F_{\mathfrak{O}})$$

endlich.

Satz 4. *Der Index* $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}$ *ist gleich* $\dfrac{\int_{F_{\mathfrak{O}}} d\xi}{\int_{F_{\mathfrak{M}}} d\xi}$.

Beweis. Es ist $\sum_{i=1}^{j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}} \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} \cdot T_i = \mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$. Da transformierte Fundamentalbereiche hier gleiche Volumina haben, so wird

$$(F_{\mathfrak{M}}) \cdot j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}} = (F_{\mathfrak{O}}).$$

§ 2.

In diesem Paragraphen bezeichne A die vollständige Algebra der Matrizen vom Grade n mit Elementen aus dem endlichen Zahlkörper k.

Wenn $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung des Körpers k bezeichnet, so ist der Ring $\mathfrak{o}_n = \sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{o}\, c_{ik}$ aller ganzen Matrizen eine spezielle Maximalordnung.

Dann gilt der folgende [3]) wichtige

Satz 5. $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}} = \mathsf{E}_{\mathfrak{o}_n}$ *hat eine endliche Anzahl von Erzeugenden.*

Beweis. Der von Hurwitz [3]) für $n = 2$ und 3 gegebene Beweis kann sofort auf beliebigen Matrizengrad n übertragen werden.

Für die folgenden Feststellungen benötigen wir einige einfache Tatsachen über freie Gruppen $\mathfrak{G}$ mit einer endlichen Anzahl $\tau_{\mathfrak{G}}$ von Erzeugenden.

O. Schreier hat bewiesen [4]), daß eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von endlichem Index $j_{\mathfrak{S}:\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{G}$ stets eine endliche Anzahl $\tau_{\mathfrak{S}}$ von Erzeugenden hat. Zwischen den Zahlen $\tau_{\mathfrak{G}}$, $\tau_{\mathfrak{S}}$ und $j_{\mathfrak{S}:\mathfrak{G}}$ besteht die Beziehung

$$\tau_{\mathfrak{S}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{G}} - 1)\, j_{\mathfrak{S}:\mathfrak{G}}.$$

Weiterhin ist jede Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\tau_{\mathfrak{G}}$ Erzeugenden isomorph zu der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{f}$ der abstrakten freien Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\tau_{\mathfrak{G}}$ Erzeugenden. Der Normalteiler $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{G}$ ist durch das Relationensystem von $\overline{\mathfrak{G}}$ bestimmt.

Wenn wir diese Tatsachen auf Einheitengruppen von Ordnungen der Matrixalgebra A anwenden, so ergeben sich explizite Bestimmungen für Basislängen und Indizes.

Durch ein τ mit einem entsprechenden großen deutschen Buchstaben als Index bezeichnen wir immer die Anzahl von Erzeugenden in der *zugeordneten freien* Gruppe der τ erzeugenden Elemente. Es ist klar, daß die Indizes j zwischen Gruppen ungeändert bleiben, wenn wir zu den Urbildern in der abstrakten freien Gruppe zurückgehen.

Satz 6. *Wenn die Ordnung* $\mathfrak{O}$ *in* $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}_n$ *enthalten ist, so hat* $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *eine endliche Basis.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 3 und den eben erwähnten Tatsachen. Wir erhalten überdies

$$\tau_{\mathfrak{O}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}} - 1)\, j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}.$$

Satz 7. *Jede Maximalordnung* $\mathfrak{M}^*$ *von* A *hat eine Einheitengruppe* $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}^*}$ *mit endlicher Basis.*

Die Elemente des Durchschnitts $\mathfrak{M} \frown \mathfrak{M}^* = \mathfrak{O}$ bilden eine Ordnung vom Höchstrang. Wegen Satz 3 sind die Indizes $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}$ und $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}^*}$ endlich. Anwendung der Schreier-

---

[3]) A. Hurwitz, Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlkörper, Göttinger Nachrichten 1895.

[4]) O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. d. Math. Sem. Hamburg 5 (1926).

schen Theorie ergibt die Gleichungen

$$\tau_{\mathfrak{O}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}} - 1)\, j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}^*} - 1)\, j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}^*},$$

also

$$\tau_{\mathfrak{M}^*} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}} - 1)\frac{j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}}{j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}^*}}$$

als Erzeugendenzahl von $\mathfrak{M}^*$.

§ 3.

Jetzt sei wieder A eine beliebige endliche über k normale einfache Algebra.

Unter K sei ein beliebiger maximal kommutativer Teilkörper von A verstanden, Ω sei seine Hauptordnung.

Dann gilt der

Satz 8. *Das direkte Produkt* $\mathfrak{M} \times \Omega$ *ist eine Ordnung vom Höchstrang in* $A_{\mathsf{K}} \cong \mathsf{K}_n = \sum_{i,k=1}^{n} \mathsf{K} c_{ik}$.

Beweis. $\mathfrak{M} \times \Omega$ ist ein Ring, der einen zum Ring aller ganzen Zahlen $\Gamma^{(0)}$ isomorphen Teilring enthält. Der Rang von $\mathfrak{M} \times \Omega$ bezüglich $\mathsf{K} \frown (\mathfrak{M} \times \Omega) = \Omega$ ist offenbar gleich n^2.

Die Vereinigungsgruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}} \cdot \mathsf{E}_{\Omega}$ der Einheitengruppen von $\mathfrak{M}$ und Ω ist eine Gruppe von Elementen aus A_{K} und als solche in der Einheitengruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}\times\Omega}$ enthalten.

Satz 9. $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ *ist in einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden enthalten.*

Beweis. Es ist $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}} \leqq \mathsf{E}_{\mathfrak{M}\times\Omega}$. Wegen der Isomorphie $A_{\mathsf{K}} \cong \mathsf{K}_n$ und Satz 6 hat die Gruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}\times\Omega}$ eine endliche Basis. Wir bemerken, daß $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ in unendlich vielen (sogar nicht isomorphen) Gruppen mit endlicher Basis enthalten ist. Das folgt aus der Vieldeutigkeit aller möglichen maximal kommutativen Teilkörper K von A.

Aus Satz 9 folgt nicht notwendig, daß $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ eine unendliche Anzahl von Erzeugenden hat. Es ist bekannt, daß in einer *beliebigen* unendlichen Gruppe sogar eine *invariante* Untergruppe mit unendlichem Index eine endliche Basis haben kann. Nur bei den freien Gruppen und einigen nahe verwandten ist bisher bewiesen, daß eine invariante Untergruppe von unendlichem Index notwendig eine unendliche Basis besitzt [5]).

Wir führen noch das folgende arithmetische Beispiel an: Sei Q der rationale Quaternionenkörper

$$(j, k)_{\mathsf{P}^{(0)}} \quad \text{mit} \quad j^2 = k^2 = -1, \quad k^{-1} jk = -j.$$

Die Einheitengruppe der Maximalordnung

$$\mathfrak{M} = \left[1, j, k, \frac{1 + j + k + l}{2}\right]_{\Gamma^{(0)}}, \quad l = jk,$$

ist die Quaternionengruppe $\tilde{\mathsf{E}}$ mit den Elementen

$$1, j, -1, -j, k, l, -k, -l.$$

Diese endliche Gruppe kann in $Q \times \mathsf{P}^{(0)}(i) \cong \mathsf{P}^{(0)}(i)_2$ mit $i = \sqrt{-1}$ durch Produkte der Matrizen $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden. Letztere sind ihrerseits in der Einheitengruppe $\tilde{\tilde{\mathsf{E}}}$ der Maximalordnung $\Gamma^{(0)}[i]_2$ mit den Basiselementen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ enthalten. Die Gruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ ist nicht invariant in $\tilde{\tilde{\mathsf{E}}}$ und hat unendlichen Index. Aber $\tilde{\mathsf{E}} = \mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ ist endlich.

[5]) Ich habe Herrn Dr. W. Magnus für diese Bemerkung zur Theorie der allgemeinen unendlichen Gruppen zu danken.

§ 4.

Die Algebra A sei in diesem Paragraphen eine Divisionsalgebra. Es soll die Struktur der maximal abelschen Untergruppen bestimmt werden.

Satz 10. *Maximal abelsche Untergruppen* $\mathfrak{S}$ *von Einheitengruppen* $\mathsf{E}_\mathfrak{D}$ *sind Einheitengruppen kommutativer Teilkörper* L *von* A.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\overline{\mathfrak{S}}$ von Elementen, die aus allen endlichen Summen von Elementen aus $\mathfrak{S}$ erzeugt wird. Das System $\overline{\mathfrak{S}}$ ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring, der die Eins erhält. Sei $Q(\overline{\mathfrak{S}}) = L$ der zugehörige Quotientenkörper. Dann ist $L \frown \mathsf{E}_\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$. Wäre nämlich $L \frown \mathsf{E}_\mathfrak{D} > \mathfrak{S}$, so gäbe es eine zu L gehörende in $\mathsf{E}_\mathfrak{D}$ liegende Einheit ε, die nicht zu $\mathfrak{S}$ gehört. Die Vereinigungsgruppe $\{\varepsilon, \mathfrak{S}\}$ wäre eine abelsche Gruppe aus $\mathsf{E}_\mathfrak{D}$, die $\mathfrak{S}$ echt enthielte. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{S}$.

Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist also Einheitengruppe einer Ordnung des Teilkörpers L von A. Hiermit ist der Typus eindeutig festgelegt: $\mathfrak{S}$ ist das direkte Produkt einer endlichen Gruppe von Einheitswurzeln mit einer endlichen Anzahl von unendlichen Zyklen. Im allgemeinen ist der Körper L sogar maximal kommutativer Teilkörper K von A. Es gilt nämlich der

Satz 10′. *L ist höchstens dann und nur dann nicht maximal, wenn* $(\mathsf{K} : L) = 2$ *ist und L total reell und* K *total imaginär.*

Beweis. Zu einem nicht maximalen Teilkörper L existiert mindestens eine Erweiterung K vom Relativgrade m, die maximal ist. Sei r_1 die Anzahl der reellen unendlichen Primstellen von L und r_2 die Anzahl der komplexen unendlichen Primstellen von L. Wenn ϱ_1 die Anzahl der in K reell bleibenden Stellen von L und $r_1 - \varrho_1 = \varrho_2$ die Anzahl der in K komplex werdenden reellen Stellen von L bezeichnen, so hat K genau $R = (\varrho_1 + r_2)\, m + \varrho_2 \dfrac{m}{2} - 1$ unabhängige Einheiten unendlicher Ordnung, während der Körper L genau $r = r_1 + r_2 - 1$ besitzt. Es wird dann und nur dann $R = r$, wenn

$$m = 2 \quad \text{und} \quad \varrho_1 = r_2 = 0.$$

Nur in diesem Falle kann $\mathsf{K} \frown \mathsf{E}_\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ eintreten. In allen anderen Fällen ist $R > r$ oder

$$\mathsf{K} \frown \mathsf{E}_\mathfrak{D} > \mathfrak{S}.$$

Dann ist aber $L = \mathsf{K}$ ein maximal kommutativer Teilkörper der Divisionsalgebra A. Denn aus $L < \mathsf{K}$ würde $\mathsf{K} \frown \mathsf{E}_\mathfrak{D} > \mathfrak{S}$ folgen, im Widerspruch zur Maximalität der Gruppe $\mathfrak{S}$.

Institute for Advanced Study
Princeton N.J., USA.
4. XI. 1935.

Eingegangen 10. Dezember 1935.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938.

Die auflösbaren abstrakten Gruppen sind bis zur Ordnung 96 bestimmt (vgl. Malmrot, Studien über Gruppen, deren Ordnung ein Produkt von 6 Primzahlen ist, Diss. Uppsala 1925, und G. A. Miller, Quart. Journ. of Math. **30** (1898), Amer. Journ. of Math. **52** (1930), Ann. of Math. (2) **31** (1931)), während die nichtauflösbaren bereits bis auf höhere Ordnungszahlen bekannt sind. Nachdem nunmehr P. Hall im Journ. of the London Math. Soc. **3** (1928), p. 98 neue Hilfsmittel geschaffen hat, sollen die sämtlichen abstrakten Gruppen bis zur Ordnungszahl 200 aufgezählt werden.

Einlieferung bis zum 31. 12. 1938. Preis 500 RM. oder die goldene Medaille des Fürstlichen Stifters und 250 RM. in bar. Für die Drucklegung der ganzen Arbeit sorgt die Gesellschaft.

Die Bewerbungsschriften sind, in deutscher oder lateinischer Sprache geschrieben, mit einem Kennwort versehen und von der Angabe von Namen und Anschrift des Verfassers in versiegeltem Umschlag begleitet, an den Archivar der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Universitätsbibliothek, Leipzig C 1, Beethovenstraße 6, zu richten.

SEI

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 175

Heft 4

Ausgegeben den 20. August 1936

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1936

Band 175. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hasse, Helmut, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper III. . . .	193
Petterson, Erik L., Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome nach einem Primzahlmodul	209
Haupt, Otto, Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung.	221
Lorey, Wilhelm, Josef Louis Lagrange.	224
Heffter, Lothar, Vom Cauchyschen Integralsatz zur Cauchyschen Integralformel. . .	240
Schilling, Otto F. G., Einheitentheorie in rationalen hyperkomplexen Systemen. . .	246
Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938.	252

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Im Juli gelangte zur Ausgabe:

MINERVA WELTKALENDER DER GELEHRTEN

Nach Ländern und Wissenschaftsgebieten geordnet und aufgebaut auf der „MINERVA", dem Jahrbuch der gelehrten Welt, Abteilung Universitäten und Fachhochschulen der Welt

Redaktionelle Leitung Dr. Friedrich Richter
Herausgegeben von Dr. Gerhard Lüdtke

Oktav. 1481 Seiten. Gebunden RM 45.—

70000 Namen und Adressen haben Aufnahme gefunden

Das Werk gibt einen Überblick über die gesamte wissenschaftliche Organisation der Welt, aufgebaut auf den Namen der Forscher und schnell übersehbar. Wer die Gelehrten irgend eines Gebietes sucht, hier findet er sie zusammengestellt. Nicht das wissenschaftliche Institut steht in diesem Weltkalender im Vordergrund, sondern die Persönlichkeit des einzelnen Gelehrten. Das Werk soll auch dazu dienen, diese persönlichen Beziehungen zu fördern und zu vertiefen.

Ein ausführlicher Prospekt steht kostenlos zur Verfügung

WALTER DE GRUYTER & CO. BERLIN W 35
WOYRSCHSTRASSE 13